ACTA UNIVERSITATIS SZEGEDIENSIS

ACTA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

ADIUVANTIBUS

L. KALMÁR, L. RÉDEI ET K. TANDORI

REDIGIT

B. SZ.-NAGY

TOMUS XXV

FASC. 3—4

SZEGED, 1964

INSTITUTUM BOLYAIANUM UNIVERSITATIS SZEGEDIENSIS

A JÓZSEF ATTILA TUDOMÁNYEGYETEM KÖZLEMÉNYEI

ACTA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

KALMÁR LÁSZLÓ, RÉDEI LÁSZLÓ ÉS TANDORI KÁROLY

KÖZREMŰKÖDÉSÉVEL

SZERKESZTI

SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA

25. KÖTET

3—4. FÜZET

SZEGED, 1964 DECEMBER

JÓZSEF ATTILA TUDOMÁNYEGYETEM BOLYAI-INTÉZETE

A note on powers of a group

By V. DLAB in Khartoum (Sudan)

Let G be a group and $n_1, n_2, \ldots, n_k$ integers with the greatest common divisor d. The following theorem was proved in [1] and re-proved in [3]:

The power $\{G^d\}$[1]) is cyclic if and only if $\{G^{n_1}\}, \{G^{n_2}\}, \ldots, \{G^{n_k}\}$ are cyclic.

The proof of sufficiency is essentially based on the fact that $\{G^d\}$ should be abelian. It is the purpose of this note to show that this conclusion follows from the mere assumption of commutativity of $\{G^{n_1}\}, \{G^{n_2}\}, \ldots, \{G^{n_k}\}$, thus answering affirmatively the second and, hence, also the first problem stated at the end of [3]. The result can be formulated as follows:

Theorem. *The power $\{G^d\}$ is abelian, or a direct product of cyclic groups, if and only if the powers $\{G^{n_1}\}, \{G^{n_2}\}, \ldots, \{G^{n_k}\}$ are abelian, or direct products of cyclic groups, respectively. Moreover, if — in the latter case — $\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2, \ldots, \mathfrak{n}_k$ and $\mathfrak{d}$ denote consecutively the minimal cardinalities of the sets of cyclic factors of $\{G^{n_1}\}, \{G^{n_2}\}, \ldots$ $\ldots, \{G^{n_k}\}$ and $\{G^d\}$ in the different decompositions into a direct product of cyclic groups, then $\mathfrak{d} = \max(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2, \ldots, \mathfrak{n}_k)$.*

Evidently, the particular case of $\mathfrak{n}_1 = \mathfrak{n}_2 = \ldots = \mathfrak{n}_k = 1$ yields the above mentioned result.

The theorem is an immediate consequence of the following two propositions. In the formulation and the proof of the first one, d stands always for the greatest common divisor of integers n_1, n_2: $n_1 = dm_1, n_2 = dm_2$; hence, integers t_1, t_2 exist such that $d = t_1 n_1 + t_2 n_2$.

Proposition 1. *Let S be a complex in a group G, $N(S)$ its normalizator (in G). Let*

$$(*) \qquad S^{n_1} \cup S^{n_2} \subseteqq N(S).$$

If $\{S^{n_1}\}$ and $\{S^{n_2}\}$ are abelian, then also $\{S^d\}$ is abelian.[2])

Proof. Always $\{S^d\} = \{S^{n_1} \cup S^{n_2}\} = \{\{S^{n_1}\}, \{S^{n_2}\}\}$. Since both $\{S^{n_1}\}$ and $\{S^{n_2}\}$ are abelian, the intersection $\{S^{n_1}\} \cap \{S^{n_2}\}$ is contained in the center Z of $\{S^d\}$. Moreover, the condition (*) implies that both $\{S^{n_1}\}$ and $\{S^{n_2}\}$ are normal in $\{S^d\}$.

---

[1]) I. e. the subgroup generated by G^d — the set of all the elements g^d with $g \in G$.

[2]) The example of the complex of the symmetric group S_3 consisting of the permutations (1, 2) and (1, 2, 3) shows that the condition (*) is essential (taking $n_1 = 2$, $n_2 = 3$).

Now, let a, b be two arbitrary elements of S. The commutator of a^d and b^d belongs to Z: for,

$$a^{-d}b^{-d}a^d b^d = a^{-t_1n_1}\left(b^{-t_2n_2}\left(a^{-t_2n_2}\left(a^{t_1n_1}b^{-t_1n_1}\right)a^{t_2n_2}\right)b^{t_2n_2}\right)b^{t_1n_1} =$$

$$= \left(a^{-t_1n_1}\left(a^{-t_2n_2}b^{-t_2n_2}\right)a^{t_1n_1}\right)\left(b^{-t_1n_1}\left(a^{t_2n_2}b^{t_2n_2}\right)b^{t_1n_1}\right)$$

belongs to both $\{S^{n_1}\}$ and $\{S^{n_2}\}$. Thus,

$$(**) \qquad a^d b^d = b^d a^d z$$

for a certain $z \in Z$. But, using (**),

$$a^{n_i}b^{n_i} = b^{n_i}a^{n_i}z^{m_i^2} \quad \text{for} \quad i = 1, 2,$$

and we get

$$z^{m_1^2} = z^{m_2^2} = 1.$$

Hence $z = 1$, i. e. any two elements of S^d commute and $\{S^d\}$ is abelian.

Proposition 2. *Let H be a direct product of cyclic groups and $\mathfrak{n}$ the least cardinality of factors in a decomposition of H into a direct product of cyclic groups. Denote by $\mathfrak{r}_p$ the cardinality of the set of p-primary cyclic factors and by $\mathfrak{r}_0$ the cardinality of the set of all infinite cyclic factors in a decomposition of H into a direct product of indecomposable factors; further, denote by $\mathfrak{r}^*$ the least cardinal number greater or equal than $\mathfrak{r}_p$ for every p. Then*

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{r}^* + \mathfrak{r}_0 \quad \textit{if} \quad \mathfrak{r}^* + \mathfrak{r}_0 \geqq \aleph_0 \quad \textit{or} \quad \textit{if} \quad \mathfrak{r}_p = 0 \quad \textit{for almost all } p, \text{[3]}$$

and $\mathfrak{n} = \aleph_0$ otherwise.

Proof. The statement follows at once from the fact that a direct product of two cyclic groups is cyclic if and only if their orders are (finite and) relatively prime.

Proof of the Theorem. Applying Proposition 1, the first part of the theorem can easily be proved by induction, since the condition (*) is satisfied in a trivial way. Hence,

$$(***) \qquad \{G^d\}^{n_i/d} = \{G^{n_i}\} \quad \text{for} \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

The assertion on direct products of cyclic groups is then a consequence of Theorem 12.4 of [2]. Finally, making use of the relations (***) and Proposition 2 we deduce the second part of the theorem, thus completing the proof.

Bibliography

[1] V. Dlab, On cyclic groups, *Czech. Math. J.*, **10/85** (1960), 244—254.

[2] L. Fuchs, *Abelian groups* (Budapest, 1958).

[3] F. Szász, Bemerkung zu meiner Arbeit „Über Gruppen, deren sämtliche nichttriviale Potenzen zyklische Untergruppen der Gruppe sind", *Acta Sci. Math.*, **23** (1962), 64—66.

(Received September 15, 1963)

[3]) I. e. $\mathfrak{n}$ is equal to the reduced rank of H in this case (cf. [2]).

Remark on a set of integers*

By ECKFORD COHEN in Knoxville (Tennessee, USA)

1. Introduction. Let k be a fixed integer >1 and let $Q_k^*(x)$ denote the number of positive integers $n \leqq x$ with the property that the multiplicity of each prime divisor of n is not a multiple of k. In a previous paper [1] it was shown by purely elementary methods that

$$Q_k^*(x) = \alpha_k x + O(\sqrt[k]{x} \log x),$$

where

$$\alpha_k = \zeta(k) \prod_p \left(1 - \frac{2}{p^k} + \frac{1}{p^{k+1}}\right),$$

the product ranging over the primes. In the same paper, making use of the properties of real Dirichlet series, the above formula was refined to

$$Q_k^*(x) = \alpha_k x + O(\sqrt[k]{x}). \tag{1}$$

It is the purpose of the present note to give a proof of (1) which eliminates the use of Dirichlet series. The proof is based on the almost trivial observation that

$$[x] = x + O(x^s), \qquad 0 \leqq s < 1, \tag{2}$$

where $[x]$ is the number of $n \leqq x$. This device has been of use in previous papers; in particular, we refer to [2].

2. Proof of (1). As in [1] we work with the function $Q_{k,r}^*(x)$ which denotes the number of $n \leqq x$ none of whose prime factors is of multiplicity jk where $j \leqq r$. We shall prove that

$$Q_{k,r}^*(x) = \alpha_{k,r} x + O(\sqrt[k]{x}), \tag{3}$$

uniformly in r, where

$$\alpha_{k,r} = \zeta(k) \prod_p \left(1 - \frac{2}{p^k} + \frac{1}{p^{k+1}} + \frac{1}{p^{kr+k}} - \frac{1}{p^{kr+k+1}}\right).$$

It suffices to prove (3) since (1) results in the limiting case as $r \to \infty$. Let $\varphi(x, n)$ denote the number of integers $\leqq x$ which are prime to n, $\varphi(n) = \varphi(n, n)$, and let $\sigma_t^*(n)$ denote the sum of the t-th powers of the square-free divisors of n. Let $\mu(n)$ denote the Möbius function. We prove first the

---

*) This research was partially supported by a grant from the National Science Foundation.

Lemma. *For each s, $0 \leqq s < 1$,*

$$\varphi(x, n) = \left(\frac{\varphi(n)}{n}\right) x + O\left(x^s \sigma^*_{-s}(n)\right). \tag{4}$$

Proof. It is well known that

$$\varphi(x, n) = \sum_{d \mid n} \mu(d) \left[\frac{x}{d}\right],$$

so that by (2)

$$\varphi(x, n) = x \sum_{d \mid n} \frac{\mu(d)}{d} + O\left(x^s \sum_{d \mid n} \frac{\mu^2(d)}{d^s}\right).$$

The lemma is proved.

Let $\mu_r(n)$ denote the generalized Möbius function introduced in [1, § 3] and let $\sigma_t(n)$ have its usual meaning as the sum of the t-th power divisors of n. We proceed on the basis of the relation

$$Q^*_{k,r}(x) = \sum_{n \leqq \sqrt[k]{x}} \mu_r(n) \varphi\left(\frac{x}{n^k}, n\right)$$

proved in [1, (3.14)]. By (4) we obtain then (cf. [1, Lemma 3.5])

$$Q^*_{k,r}(x) = \alpha_{k,r} x + O\left(x \sum_{n > \sqrt[k]{x}} \frac{1}{n^k}\right) + O\left(x^s \sum_{n \leqq \sqrt[k]{x}} \frac{\sigma_{-s}(n)}{n^{sk}}\right),$$

$0 \leqq s < 1$, where the O-terms are uniform in r. Denote the sum in the second O-term by $R_{k,s}(x)$. Then

$$R_{k,s}(x) = \sum_{n \leqq \sqrt[k]{x}} n^{-ks} \sum_{d\delta = n} d^{-s} = \sum_{d \leqq \sqrt[k]{x}} d^{-s(k+1)} \sum_{\delta \leqq \sqrt[k]{x}/d} \delta^{-ks}.$$

Restricting s to the range $0 \leqq s < 1/k$, it follows that

$$R_{k,s}(x) = O\left(\sum_{d \leqq \sqrt[k]{x}} d^{-s(k+1)} \cdot \left(\frac{x^{1/k}}{d}\right)^{1-ks}\right) = O\left(x^{1/k-s} \sum_{d \leqq \sqrt[k]{x}} d^{-s-1}\right).$$

With the further restriction, $0 < s < 1/k$, we have $R_{k,s}(x) = O(x^{1/k-s})$, from which (3) results.

Bibliography

[1] ECKFORD COHEN, Some sets of integers related to the k-free integers, *Acta Sci. Math.*, **22** (1961), 223–233.

[2] ECKFORD COHEN, An elementary estimate for the k-free integers, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **69** (1963), 762–765.

THE UNIVERSITY OF TENNESSEE

(Received November 26, 1963)

Bemerkungen zur Holomorphentheorie der Ringe

Von G. POLLÁK in Szeged

Den Begriff des Ringholomorphs hat RÉDEI in [2] eingeführt. Es stellte sich heraus, daß im Gegensatz zum analogen gruppentheoretischen Begriff, ein Ring im allgemeinen mehrere Holomorphe hat. Deshalb hat die Frage der Aufstellung der Bedingungen, unter denen ein Ring nur ein Holomorph hat, eine zentrale Bedeutung bekommen. Mit dieser Frage haben sich der Reihe nach RÉDEI [2], SZENDREI [3], LEEUWEN [1] und neulichst WEINERT und EILHAUER [4] beschäftigt.

Zur Zeit sind die folgenden hinreichenden Bedingungen für die Einzigkeit des Holomorphs eines Ringes R bekannt [1]) (N bezeichnet den Annullator von R, $\mathscr{E}(G)$ den Endomorphismenring der abelschen Gruppe G):

I. $R=R^2$ (LEEUWEN [1]),
II. $N=0$ (WEINERT—EILHAUER [4]),
III. $R=R^2+N$ und $\mathscr{E}(N^+)$ ist kommutativ (WEINERT—EILHAUER [4]) und die triviale Bedingung
IV. $\mathscr{E}(R^+)$ ist kommutativ.

Alle übrigen, bisher erhaltenen Bedingungen folgen aus den obigen.

1. Wir werden einen Satz beweisen, der die angeführten Resultate (außer IV) zur Folge hat. Dieser lautet:

Hat der Ring R einen charakteristischen Unterring R', der ein einziges Holomorph hat, und ist dabei jeder Homomorphismus von R/R' in N dem Zerohomomorphismus gleich,[2]) *so hat auch R ein einziges Holomorph.*

Dem Beweis schicken wir zwei Bemerkungen voraus:

1°) Ist ν ein Homomorphismus von R in N, so ist die durch

$$(1) \qquad \nu^* a = a\nu^* = \nu a \qquad (a \in R)$$

definierte Doppelabbildung ν^* ein Doppelhomothetismus. In der Tat, ν^* ist linear und für $a, b \in R$ gelten

$$(a\nu^*)b = (\nu a)b = 0 = a(\nu b) = a(\nu^* b), \quad (\nu^* a)\nu^* = \nu^*(a\nu^*),$$

und, da $R^2 \subseteqq \operatorname{Ker} \nu$ bestehen muß, gilt auch

$$\nu^*(ab) = 0 = (\nu^* a)b, \quad (ab)\nu^* = 0 = a(b\nu^*).$$

[1]) Die unten vorkommenden Begriffe sind u. a. in [2] zu finden.
[2]) Obige Bedingung läßt sich als $\operatorname{Hom}(R^+/(R', R^2)^+, N^+) = 0$ schreiben.

2°. Sind α, β Doppelhomothetismen von R, so ist die durch

$$\nu a = (\alpha a)\beta - \alpha(a\beta) \tag{2}$$

definierte Abbildung ν ein Homomorphismus von R in N. In der Tat, ν ist offensichtlich linear. Ferner gilt für beliebige $a, b \in R$

$$(\nu a)b = [(\alpha a)\beta - \alpha(a\beta)]b = [(\alpha a)\beta]b - [\alpha(a\beta)]b = (\alpha a)(\beta b) - \alpha[(a\beta)b] =$$
$$= (\alpha a)(\beta b) - \alpha[a(\beta b)] = 0,$$

d. h. $\nu a \in N$. Ebenso haben wir

$$\nu(ab) = [\alpha(ab)]\beta - \alpha[(ab)\beta] = [(\alpha a)b]\beta - \alpha[a(b\beta)] = 0 = \nu(a)\nu(b),$$

d. h. ν ist ein Homomorphismus.[3])

Der Beweis unseres Satzes ergibt sich jetzt schon leicht. Wir brauchen nämlich zu zeigen, daß aus den Bedingungen des Satzes folgt, daß jedes Paar α, β von Doppelhomothetismen befreundet ist. Da aber R' ein charakteristischer Unterring von R ist, induzieren α und β je einen Doppelhomothetismus von R' (nach [2], Satz 1). Da R' ein einziges Holomorph hat, muß $\nu a = 0$ für $a \in R'$ sein (ν ist definiert wie in (2)). Da endlich ν nach 2° ein Homomorphismus von R in N und nach dem eben Bemerkten $R' \subseteq \operatorname{Ker} \nu$ ist, haben wir $\nu a = 0$ für sämtliche $a \in R$. Dies bedeutet aber, daß α und β befreundet sind, was zu beweisen war.

Aus diesem Satz folgt, daß eine jede der Bedingungen I—III hinreichend ist.

Gilt I, so genügt es $R' = 0$ zu wählen, denn, wie schon bemerkt, R^2 im Kern jedes Homomorphismus von R in N enthalten ist.

Gilt II, so ist (1) bei $R' = 0$ trivialerweise erfüllt.

Gilt III, so können wir $R' = N$ setzen. In der Tat gilt in diesem Falle

$$\operatorname{Hom}(R^+/(N, R^2)^+, N^+) = \operatorname{Hom}(R^+/R^+, N^+) = 0.$$

Dies zeigt sogar, daß in III statt $R = R^2 + N$ schon die schwächere Annahme $R = (R^2, N)$ ausreicht.

Aus dem Satz folgt auch, daß R ein einziges Holomorph hat, wenn dies für ein Primideal $\mathfrak{p}$ von R gilt. $\mathfrak{p}$ ist nämlich charakteristisch (Rédei [2]) und $R/\mathfrak{p}$ nullteilerfrei.

Es genügt selbstverständlich auch, wenn R überhaupt keinen nichttrivialen Homomorphismus in N hat (wir können dann wieder $R' = 0$ wählen).

Ähnlich zum obigen Satze läßt sich zeigen:

Hat der Ring R ein Ideal $\mathfrak{r}$ so, daß weder $\mathfrak{r}$, noch $R/\mathfrak{r}$ einen nichttrivialen Homomorphismus in N haben, so hat R ein einziges Holomorph.

Ist nämlich $\mathfrak{r}$ ein solches Ideal, so bildet ein Homomorphismus $\varphi: R \to N$ das Ideal $\mathfrak{r}$ in N, also in 0 ab; dann ist aber φ eigentlich ein Homomorphismus von $R/\mathfrak{r}$ in N, d. h. der Zerohomomorphismus.

---

[3]) Diese (und teilweise auch die erste) Bemerkung beruht eigentlich auf der Tatsache, daß unter den Abbildungen von R in einen Zeroring die Homomorphismen und Homothetismen zusammenfallen.

2. Als notwendige Bedingung für die Eindeutigkeit des Holomorphs ist nur folgendes bekannt:

V. Hat R einen Zeroring mit nichtkommutativem Endomorphismenring zum direkten Summand, so hat R mehrere Holomorphe (WEINERT—EILHAUER [4]).

Als Spezialfall von V (und IV) entsteht aber die Tatsache, daß ein Zeroring dann und nur dann ein einziges Holomorph hat, wenn sein Endomorphismenring kommutativ ist (RÉDEI [2]). Mit Benutzung dieses Spezialfalles erweist sich V selbst als ein Spezialfall der folgenden Tatsache:

Hat R ein einziges Holomorph, so gilt dies für jeden direkten Summanden von R.

Ist nämlich $R = R_1 \dotplus R_2$, und sind σ, τ zwei nichtbefreundete Doppelhomothetismen von R_1, so sind σ', τ', die wir durch

$$\sigma'(a_1+a_2) = \sigma a_1, \quad (a_1+a_2)\sigma' = a_1\sigma,$$

$$\tau'(a_1+a_2) = \tau a_1, \quad (a_1+a_2)\tau' = a_1\tau \quad (a_1 \in R_1, a_2 \in R_2)$$

definieren, nichtbefreundete Doppelhomothetismen von R.

Jetzt möchten wir uns mit der Frage beschäftigen, wann ein direkter Summand ein charakteristischer Unterring ist. Die Antwort wird durch den folgenden Satz gegeben:

Sei $R = R_1 \dotplus R_2$ eine direkte Summe und bezeichne N_2 den Annullator von R_2. Damit R_1 ein charakteristischer Unterring in R ist, ist es notwendig und hinreichend, daß R_1 keinen nichttrivialen Homomorphismus in N_2 hat (d.h. $\mathrm{Hom}(R_1^+/(R_1^2)^+, N_2^+)=0$ *gilt).*

Ist nämlich ν_1 ein nichttrivialer Homomorphismus von R_1 in N_2, so ist die durch

$$\nu(a_1+a_2) = \nu_1 a_1$$

definierte Abbildung ν ein Homomorphismus von R in seinen Annullator N. Nach der Bemerkung 1° ist dann die durch (1) definierte Doppelabbildung ν^* ein Doppelhomothetismus von R, der dabei R_1 nicht in sich selbst abbildet. Somit ist R_1 in diesem Fall nicht charakteristisch.

Gibt es dagegen keinen nichttrivialen Homomorphismus ν_1, so sei σ ein beliebiger Doppelhomothetismus von R und $a \in R_1$. Um zu beweisen, daß R_1 charakteristisch ist, genügt es zu zeigen, daß $\sigma a \in R_1$ gilt (für $a\sigma$ läßt sich das ebenso tun.) Wir setzen $\sigma a = a' + a''$ $(a' \in R_1, a'' \in R_2)$ und $x\sigma = x' + x''$ $(x' \in R_1, x'' \in R_2)$ für ein beliebiges $x \in R_2$. Dann gilt

$$a''x = (\sigma a)x = \sigma(ax) = 0, \quad xa'' = x(\sigma a) = (x\sigma)a = x'a \in R_1,$$

also auch $xa''=0$. Somit ist $a \to a''$ ein Homothetismus von R_1 in N_2, dann aber auch ein Homomorphismus (siehe Fußnote [3])). Nach der Annahme muß dann $a''=0$, $\sigma a = a' \in R_1$ sein, was zu beweisen war.

Aus dem Bewiesenen folgt:

Hat der Ring R ein einziges Holomorph, so ist jeder direkte Summand in R charakteristisch.

In der Tat, sei $R = R_1 \dotplus R_2$. Ist nun R_1 nicht charakteristisch (also $R_1, R_2 \neq 0$), so sei ν^* der im ersten Teil des vorigen Beweises definierte Doppelhomothetismus. Der Doppelhomothetismus σ sei durch

$$\sigma(a_1 + a_2) = (a_1 + a_2)\sigma = a_1 \qquad (a_1 \in R_1, a_2 \in R_2)$$

definiert. Dann sind σ und ν^* nicht befreundet, denn für ein $a \in R_1$ mit $a\nu^* \neq 0$ gilt

$$(\sigma a)\nu^* = a\nu^*, \quad \sigma(a\nu^*) = 0$$

und somit hat R mehrere Holomorphe, was zu beweisen war.

Über das Holomorph einer direkten Summe können wir folgendes sagen:

Sind die Unterringe R_1 und R_2 charakteristisch in der direkten Summe $R = R_1 \dotplus R_2$, so entstehen sämtliche Holomorphe von R in der Form $H = H_1 \dotplus H_2$, wo H_i ein beliebiges Holomorph von R_i ist $(i = 1, 2)$. Wenn also R_1, R_2 je ein Holomorph haben, so gilt dies auch für R.

Seien nämlich σ_1, σ_2 Doppelhomothetismen von R_1 bzw. R_2. Die Doppelabbildungen von R

$$\begin{aligned} \sigma_1'(a_1 + a_2) &= \sigma_1 a_1, \quad (a_1 + a_2)\sigma_1' = a_1\sigma_1 \\ \sigma_2'(a_1 + a_2) &= \sigma_2 a_2, \quad (a_1 + a_2)\sigma_2' = a_2\sigma_2 \end{aligned} \qquad (a_1 \in R_1, a_2 \in R_2)$$

sind Doppelhomothetismen und für einen maximalen Doppelhomothetismenring D_i $(i = 1, 2)$ von R_i ist die Abbildung $\sigma_i \to \sigma_i'$ $(\sigma_i \in D_i)$ ein Isomorphismus auf einen Doppelhomothetismenring D_i' von R. σ_1' und σ_2' sind immer befreundet, denn

$$(3) \qquad \sigma_1'(a\sigma_2') = (\sigma_1' a)\sigma_2' = \sigma_2'(a\sigma_1') = (\sigma_2' a)\sigma_1' = 0$$

ist und ebenso gilt

$$(4) \qquad \sigma_1'\sigma_2' = \sigma_2'\sigma_1' = 0.$$

(3) bedeutet, daß es für beliebige maximale Doppelhomothetismenringe D_1, D_2 einen maximalen Doppelhomothetismenring D von R gibt, der D_1' und D_2' enthält. Ist aber σ ein beliebiger Doppelhomothetismus von R, so induziert er je einen Doppelhomothetismus σ_1, σ_2 von R_1 bzw. R_2 und es gilt offenbar $\sigma = \sigma_1' + \sigma_2'$, d. h. D_1' und D_2' erzeugen D (es ist nämlich klar, daß D_i' sämtliche Doppelhomothetismen aus D enthält, die R in R_i abbilden, denn σ_i' und τ_i' sind offensichtlich dann und nur dann befreundet, wenn dies für σ_i und τ_i gilt). Ferner gilt wegen (4) und $D_1' \cap D_2' = 0$ auch $D = D_1' \dotplus D_2'$.

Umgekehrt, sei jetzt D ein maximaler Doppelhomothetismenring von R und sei $\sigma \in D$. Wie schon gesagt, ist σ in der Form $\sigma = \sigma_1' + \sigma_2'$ darstellbar, wo σ_i' den Ring R in R_i abbildet. Da σ und $\tau = \tau_1' + \tau_2' (\in D)$ dann und nur dann befreundet sind, wenn σ_1' mit τ_1', σ_2' mit τ_2' befreundet ist, so gilt gleichzeitig mit $\sigma \in D$ auch $\sigma_1', \sigma_2' \in D$. Es bezeichne D_i' die Menge derjenigen Elemente von D, die R in R_i abbilden. Wäre der zu D_i' gehörige Doppelhomothetismenring D_i von R_i nicht maximal, so könnte man einen Doppelhomothetismus ϱ_i von R_i finden, der mit sämtlichen Doppelhomothetismen aus D_i befreundet ist. Dann ist aber ϱ_i' mit sämtlichen Doppelhomothetismen aus D_i', also auch aus D befreundet und D wäre kein maximaler Ring. Somit sind D_1, D_2 maximale Doppelhomothetismenringe von R_1 bzw. R_2 und dann, wie schon bewiesen, gilt $D = D_1' \dotplus D_2'$.

Das Holomorph $H = D \dotplus R$ besteht aus den Elementen (σ, a) mit den Kompositionsregeln (mit Benutzung von $\sigma_i' a = \sigma_i' a_i$ usw.)

$$(\sigma, a)+(\tau, b) = (\sigma+\tau, a+b) = (\sigma_1'+\tau_1', a_1+b_1)+(\sigma_2'+\tau_2', a_2+b_2),$$

$$(\sigma, a)(\tau, b) = (\sigma\tau, \sigma b+a\tau+ab) = (\sigma_1'\tau_1'+\sigma_2'\tau_2', \sigma_1' b+\sigma_2' b+a\tau_1'+a\tau_2'+$$

$$+a_1 b_1+a_2 b_2) = (\sigma_1'\tau_1', \sigma_1' b_1+a_1\tau_1'+a_1 b_1)+(\sigma_2'\tau_2', \sigma_2' b_2+a_2\tau_2'+a_2 b_2)$$

und so gilt in der Tat $H = H_1 \dotplus H_2$.

Literaturverzeichnis

[1] L. VAN LEEUWEN, On the holomorphs of a ring, *Nederl. Akad. Wet. Proc.*, ser. A, **61** (1958), 162–169.

[2] L. RÉDEI, Die Holomorphentheorie für Gruppen und Ringe, *Acta Acad. Sci. Hung.*, **5** (1954), 169–195.

[3] J. SZENDREI, Zur Holomorphentheorie der Ringe, *Publ. Math. Debrecen*, **4** (1955/6), 450–454.

[4] H. J. WEINERT—R. EILHAUER, Zur Holomorphentheorie der Ringe, *Acta Sci. Math.* **24**, (1963), 28–33.

(Eingegangen am 9. August 1963)

Some torsion free rank two groups*)

By JOHN KOEHLER, S. J., in Seattle (Washington, USA)

The first theorem of this paper answers in the affirmative a conjecture of BEAUMONT and PIERCE concerning quotient divisible (q. d.) rank two groups [1, p. 40]. The rest of the paper gives a construction for rank two groups with an infinite type set. The author assumes familiarity with the notation and theorems of [1], which shall be used throughout.

Theorem. *If $T=\{\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_n\}$ is a finite set of distinct types such that $\tau_i \cap \tau_j = \tau_0$ if $i \neq j$ and τ_0 is non-nil, then there exists a quotient divisible group A such that $T(A)=T$.*

Proof. By Theorem 6.3 in [1], A is a q. d. torsion free rank two group if and only if $\Sigma + H(\xi) + H(\eta)$ and $H(\xi) \cap H(\eta)$ are non-nil, where $(A; x_1, x_2) \to (\Sigma, X)$ and $(\xi, \eta) \in X$. Now $\tau_0 = [H(\xi) \cap H(\eta)]$ is given as non-nil. Hence the problem reduces to that of finding a group A such that $T(A)=T$ and an independent pair x_1, x_2 such that $(A; x_1, x_2) \to (\Sigma, X)$, where Σ is non-nil, and $\Sigma(p)=\infty$ for all but a finite number of primes p such that $0<h_p(\xi(p))<\infty$ and $0<h(\eta(p))<\infty$ whenever $(\xi, \eta) \in X$.

Let χ_0 be the characteristic such that $\chi_0 \in \tau_0$ and $\chi_0(p)=0$ or ∞ for all p. Let χ_i' be a characteristic such that $\chi_i' \in \tau_i$, $i=1, \dots, n$. If $i \neq j$, let $\pi_{ij}=\{p \mid \chi_i'(p)<\infty, (\chi_i' \cap \chi_j')(p) \neq \chi_0(p)\}$. Each π_{ij} is finite, since $\tau_i \cap \tau_j = \tau_0$. Furthermore, $p \in \pi_{ij}$ if and only if $0 = \chi_0(p) < \chi_i'(p) < \infty$ and $0 < \chi_j'(p)$. For $i=1, \dots, n$ define χ_i by

$$\chi_i(p) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad p \in \bigcup\limits_j \pi_{ij} \\ \chi_i'(p) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Then $\chi_i \in \tau_i$ since $\bigcup\limits_j \pi_{ij}$ is finite and both χ_i and χ_i' are finite on this set. It is easy to check that $\chi_i \cap \chi_j = \chi_0$ if $i \neq j$.

The following sets of primes partition π, $1 \leqq k \leqq n$.

$$\pi_0 = \{p \mid \chi_k(p)=0 \text{ for all } k\};$$
$$\pi_0' = \{p \mid \chi_k(p)=\infty \text{ for all } k\} = \{p \mid \chi_0(p)=\infty\};$$
$$\pi_k = \{p \mid \infty > \chi_k(p) > 0 = \chi_0(p)\};$$
$$\pi_k' = \{p \mid \infty = \chi_k(p) > 0 = \chi_0(p)\}.$$

*) This paper is adapted from part of the author's doctoral dissertation, written under the direction of R. A. BEAUMONT.

Define Σ, ξ, and η by

$$\Sigma(p)=\begin{cases}0 & \text{if } p\in\pi_0\cup\pi_0',\\ \infty & \text{otherwise;}\end{cases}$$

$$\xi(p)=\begin{cases}0 & \text{if } p\in\pi_0',\\ 1 & \text{otherwise;}\end{cases}$$

$$\eta(p)=\begin{cases}0 & \text{if } p\in\pi_0',\\ 1 & \text{if } p\in\pi_0,\\ k & \text{if } p\in\pi_k' \ (k=1,\dots,n),\\ k\beta(p) & \text{if } p\in\pi_k \ (k=1,\dots,n);\end{cases}$$

where $\beta(p)=1+\sum_{n=0}^{\infty}p^{2^n l}$, $l=\chi_k(p)$. Thus if $p\in\pi_k$, $\eta(p)/\xi(p)$ is irrational; $h_p(\eta(p))=h_p(\xi(p))=0$; and $h_p(\xi(p)-\eta(p))=h_p(p^l+p^{2l}+p^{4l}+\dots)=l=\chi_k(p)$.

Let A be a rank two group containing independent elements x_1 and x_2 such that $(A;x_1,x_2)\to(\Sigma,X)$, $(\xi,\eta)\in X$. Note that $[H(\xi)]=[H(\eta)]=\tau_0$ is non-nil, and that $\Sigma(p)+h_p(\xi(p))+h_p(\eta(p))$ is 0 if $p\in\pi_0$, and is ∞ otherwise. Hence A is q. d.

It remains to show that $T(A)=T$. To do this, we employ 7. 2, 7. 3, and 7. 4 of [1]. The results are illustrated in the following tables, where $0\neq s\in R$, Δ and ϱ are as defined in 7.2 and 7.3 respectively. The blank places are not needed to calculate $T(A)$.

	$\Sigma(p)$	$\Delta(\eta-s\xi)(p)$	$(H(\xi)\cap H(\eta))(p)$	$\chi_0(p)$	$\chi_j(p)$
$p\in\pi_0$	0		0	0	0
$p\in\pi_0'$	0		∞	∞	∞
$p\in\pi_k$ $k\geqq 1$	∞	$\Delta(k\beta(p)-s)$ $=0$	0	0	$\chi_j(p)<\infty$ if $j=k$; 0 if $j\neq k$
$p\in\pi'$ $k\geqq 1$	∞	$\Delta(k-s)$ $=\infty$ if $s=k$; $=0$ if $s\neq k$	0	0	∞ if $j=k$; 0 if $j\neq k$

In the following table, let $1\leqq k\leqq n$, $l=\chi_k(p)$, and let * indicate that the case under consideration occurs for at most a finite number of primes.

Thus $\Sigma\cap(H(\varrho-s)+\Delta(\eta-s\xi))+H(\xi)\cap H(\eta)$ is equivalent to χ_k if $s=k$, $k=1,\dots,n$, and is equivalent to χ_0 if $s\neq k$. $H(\xi)\sim\chi_0\sim H(\eta)$. Hence $T(A)=$ $=\{\tau_0,\tau_1,\dots,\tau_n\}=T$ by 7. 4 of [1].

Lemma. *Let $r_1,r_2,\dots,r_k$ be a set of distinct positive integers and let $n_1,n_2,\dots$ $\dots,n_k$ be a set of distinct positive integers which are relatively prime in pairs. Then there exist positive integers $r_{k+1},x_1,x_2,\dots,x_k$ such that $(x_i,n_i)=1$ and $r_{k+1}=$ $=x_in_i+r_i$, $i=1,2,\dots,k$.*

Proof. By the Chinese Remainder Theorem, there exist positive integers $y_1,y_2,\dots,y_k$ such that the numbers $y_in_i+r_i$ are all equal to some common value

	$\varrho(p)$	$H(\varrho-s)(p)$	
$p\in\pi_k,\ p\nmid k$	$\eta(p)/\xi(p)=$ $k(1+p^l+p^{2l}+\dots)$	$h_p(k(1+p^l+p^{2l}+\dots)-s)$ $=\chi_k(p)$ if $s=k$ $=\chi_0(p)$ if $s\neq k,\ h_p(k-s)=0$ $<\infty$ if $s\neq k,\ h_p(k-s)\neq 0$	*
$p\in\pi_k,\ p\mid k$	0	$h_p(-s)<\infty$	*
$p\in\pi_k',\ p\nmid k$	k	$h_p(k-s)$ $=\infty$ if $s=k$ $=0$ if $s\neq k,\ h_p(k-s)=0$ $<\infty$ if $s\neq k,\ h_p(k-s)\neq 0$	*
$p\in\pi_k',\ p\mid k$	0	$h_p(-s)<\infty$	*

s_{k+1}. All such values will be congruent modulo $N=n_1n_2\dots n_k$. Let M be the product of all the primes p such that for some index i, $p|n_i$ and $p\nmid y_i$. It is easy to check that, if $x_i = y_i+MN/n_i$, $i=1,\dots,k$, and $r_{k+1} = x_1n_1+r_1$, then the conclusion of the lemma follows.

Construction. Let $T=\{\tau_0,\tau_1,\tau_2,\dots\}$ be an infinite type set such that $\tau_i\cap\tau_j = \tau_0$ if $i\neq j$. For $i=0,1,2,\dots$, choose characteristics $\chi_i\in\tau_i$ such that $\chi_i\geqq\chi_0$. Somewhat as before, define

$$\pi_0=\{p|\infty>\chi_0(p)=\chi_i(p)\ \text{for all}\ i\},$$
$$\pi_0'=\{p|\chi_0(p)=\infty\},$$
$$\pi_k'=\{p|\infty=\chi_k(p)\neq\chi_0(p)\},\qquad k=1,2,\dots,$$
$$\pi_k^*=\{p|\infty>\chi_k(p)>\chi_0(p)\},\qquad k=1,2,\dots;$$

having defined π_0, define inductively

$$\pi_k = \pi_k^*-\Big(\bigcup_{j\neq k}\pi_j'\cup\bigcup_{j<k}\pi_j\Big),\qquad k=1,2,\dots.$$

$\pi_0,\pi_1,\pi_2,\dots,\pi_0',\pi_1',\pi_2',\dots$ partition π. We wish, however, to split the primes further. Let $\pi_0''=\varnothing$; define inductively $\pi_k''=\bigcup_j(\pi_j'\cap\pi_k^*)-\bigcup_{j<k}\pi_j''$,

$$\pi_{ij}=\pi_i''\cap\pi_j',\qquad i\neq j.$$

Each π_{ij} is a finite set, and $\pi_{ij}\cap\pi_{kl}\neq\varnothing$ only if $i=k$ and $j=l$.

Let $d(p) = \chi_i(p)-\chi_0(p)$ for each $p\in\pi_{ij}$; define

$$n_{ij}=\prod_{\pi_{ij}}p^{d(p)}\prod_{\pi_{ji}}p^{d(p)},$$

where $i<j$ and where we take the empty product to be 1. Note that $n_{1j},n_{2j},\dots$ are relatively prime in pairs. Let $r_1=1, r_2 = x_{12}n_{12}+r_1,\dots,r_k = x_{ik}n_{ik}+r_i$, where for each k and each $i<k$, r_k and x_{ik} satisfy the above lemma.

We now redefine χ_k and π_k so that no primes in π_k divide r_k or the x_{ik}, $i<k$. We do this inductively, leaving χ_0 and π_0 unchanged. Having redefined χ_i and π_i

for $i<k$, let $p\in\pi_k$, $p|r_k$ or $p|x_{ik}$. Change $\chi_k(p)$ to $\chi_0(p)$; remove p from π_k; and insert p in π_j, where j is the first index greater than k for which $\infty>\chi_j(p)>\chi_0(p)$. If there is no such j, let p be in π_0. Under these new definitions, $\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_0', \pi_1', \ldots$ still partition π.

Order the primes in their natural order: $p_1=2$, $p_2=3$, etc. Define ξ and η as follows:

$$\xi(p) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad p\in\pi_0', \\ p^{\chi_0(p)} & \text{otherwise}; \end{cases}$$

$$\eta(p) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad p\in\pi_0', \\ p^{\chi_0(p)} r_k & \text{if} \quad p\in\pi_k', \\ p_m^{\chi_0(p_m)}\left(m+\sum\limits_{i=0}^{\infty} p_m^{2^i}\right) & \text{if} \quad p_m\in\pi_0, \\ p^{\chi_0(p)} r_k\left(1+\sum\limits_{i=0}^{\infty} p^{2^i}\right) & \text{if} \quad p\in\pi_k. \end{cases}$$

Define Σ arbitrarily to satisfy

$$\Sigma(p) = \begin{cases} =0 & \text{if} \quad \chi_0(p)=\infty, \\ \geqq \sup_i\{\chi_i(p)-\chi_0(p)\} & \text{if} \quad \chi_0(p)\neq\infty. \end{cases}$$

Let $(A; x_1, x_2)\to(\Sigma, X)$, where $(\xi, \eta)\in X$.

If, as in the preceding theorem, we perform the calculations for $\Theta(s) = \Sigma\cap\big(H(\varrho-s)+\Delta(\eta-s\xi)\big)+H(\xi)\cap H(\eta)$ for every s, $0\neq s\in R$, we obtain the results:

(1) $\Theta(r_k)\sim\chi_k'$, $k=1, 2, \ldots$, where $\chi_k'(p) = \chi_0(p)+h_p(r_j-r_k)$ if $p\in\pi_j'$ and $\chi_k(p)=\chi_0(p)$ for some $j\geqq 1$. $\chi_k'(p)=\chi_k(p)$ otherwise.

(2) $\Theta(s)\sim\chi_0$ if $s\neq r_k$, unless for infinitely many k there are primes p such that

(a) $h_p(r_k-s)>0$, where $p\in\pi_k'$, $p\nmid r_k$; or

(b) $h_p\big(r_k\eta(p)/\xi(p)-s\big)>0$ where $p\in\pi_k$, $p\nmid r_k$.

(3) $H(\xi)=\chi_0$,

(4) $H(\eta)\sim\chi_0$ unless for infinitely many k, $h_p(r_k)>0$ for some $p\in\pi_k'$.

Since each $\chi_k'\geqq\chi_k>\chi_0$, it is clear that τ_0, $[\chi_1']$, $[\chi_2']$, ... are all distinct types. Since A is a group and $\tau_0=H(\xi)$, then $[\chi_j']\cap[\chi_k'] = \tau_0$ if $j\neq k$. Thus $T(A)$ is infinite, and $T(A)=T$ unless the exceptions noted above occur.

The following corollaries are evident:

Corollary 1. *Let $T=\{\tau_0, \tau_1, \tau_2, \ldots\}$ be an infinite set of types such that $\tau_i\cap\tau_j = \tau_0$ if $i\neq j$. Then there is a set of types $T'=\{\tau_0, \tau_1', \tau_2', \ldots\}$ such that $\tau_i'\geqq\tau_i$ if $i\geqq 1$ and $\tau_i'\cap\tau_j' = \tau_0$ if $i\neq j$ and a rank two group A such that $T(A)\supseteqq T'$.*

Corollary 2. *Let $T=\{\tau_0, \tau_1, \tau_2, \ldots\}$ be an infinite set of types such that $\tau_i\cap\tau_j = \tau_0$ if $i\neq j$ and such that, for only finitely many i, $\chi_i(p)=\infty$ occurs, where $\chi_i\in\tau_i$. Then there is a rank two group A such that $T(A)\supseteqq T$.*

Corollary 3. *In the above construction, if τ_0 is non-nil and if we let $\Sigma(p)=\infty$ whenever $\infty \neq \chi_0 p_0$ for any $\chi_0 \in \tau_0$, then A will be a q. d. group having an infinite type set.*

Example. Define $\chi_0, \chi_1, \chi_2, \dots$ by

$$\chi_0(p)=0 \text{ for all } p,$$
$$\chi_1(p)=1 \text{ for all } p,$$
$$\chi_k(p_{k-1})=\infty,\ \chi_k(p)=0 \text{ for all other } p,$$

where $k>1$, and where the primes are given their natural order. Clearly $[\chi_i]\cap[\chi_j] = [\chi_0]$ if $i \neq j$. However $\chi_1 \cap \chi_k \neq \chi_0$ if $k>1$; in fact, it is impossible to find a set of characteristics equivalent to these such that any two intersect to give χ_0.

Following the construction, we get $\pi_0=\pi_0'=\pi_1'=\pi_k=\varnothing$. If $k>1$, $\pi_k'=\{p_{k-1}\}$, $\pi_k''=\varnothing$. $\pi_1''=\pi$. Thus if $k>1$, $\pi_{1k}=\{p_{k-1}\}=\pi_k'$, $n_{1k}=p_{k-1}$, all other n_{ik} are 1. Let $r_1=1$, $x_{1k}=1$, $r_k = x_{1k}n_{1k}+1 = p_{k-1}+1$, and $x_{jk} = r_k - r_j$ for $1<j<k$. These numbers satisfy the lemma trivially for each k; also, it is not necessary to redefine any χ_k or π_k.

Define for all primes p_k: $\Sigma(p_k)=\infty$, $\xi(p_k)=1$, $\eta(p_k) = r_{k+1} = p_k+1$. Let $(A; x_1, x_2) \to (\Sigma, [(\xi, \eta)])$.

Then $H(\xi)=H(\eta)=\chi_0$. $\Theta(s)$ is easy to compute for all $0\neq s\in R$. $\Delta(\eta - s\xi)(p_k) = \infty \Leftrightarrow s = r_{k+1} = p_k+1$. If $s=1$, $h_p(\varrho(p)-1) = h_p(p+1-1) = 1$ for all p. Hence $\Theta(1)=\chi_1$. If $s=r_k$, $k>1$, then $\Theta(r_k)(p_{k-1})=\infty$. For other primes $p\neq p_{k-1}$, $h_p(\varrho(p)-r_k) = h_p(p-p_{k-1}) = 0$. Hence $\Theta(r_k)=\chi_k$. If $s\neq r_k$, $k\geqq 1$, then $h_p(\varrho(p)-s) = h_p(p+1-s) = h_p(1-s) = 0$ for all but a finite number of p. Hence $\Theta(s)\sim\chi_0$.

Therefore $T(A)=\{[\chi_0], [\chi_1], [\chi_2], \dots\}$. Thus in this simple example, the construction gives good results.

References

[1] R. A. Beaumont and R. S. Pierce, Torsion Free Groups of Rank Two, *Memoirs Amer. Math. Soc.*, **38** (1961).

[2] L. Fuchs, *Abelian Groups* (New York, 1960).

(Received August 8, 1963)

Darstellungen von Restklassen (mod n) als Summen von zwei Quadraten

Von OTT-HEINRICH KELLER in Halle

Es sei n eine natürliche Zahl. Wir fragen nach den eigentlichen Darstellungen der zu n primen Restklassen $s \pmod n$ durch Summen zweier Quadrate $s \equiv x^2 + y^2 \pmod n$. Es sei also $(x, y, n) = 1$; $(s, n) = 1$. Falls $4|n$, muß $s \equiv 1 \pmod 4$ sein.

Jede solche Darstellung notieren wir mit dem Zahlenpaar (x, y) und beachten dabei Reihenfolge und Vorzeichen. (Jeder Darstellung, für die $x \not\equiv \pm y$; $x \not\equiv -x$; $y \not\equiv -y \pmod n$ seien also 8 Zahlenpaare $(\pm x, \pm y)$ und $(\pm y, \pm x)$ zugeordnet.)

Es ist zu zeigen:

1. Jede Zahl s mit $(s, n) = 1$, und, falls $4|n$, mit $s \equiv 1 \pmod 4$ ist darstellbar.
2. Die Anzahl der Darstellungen von $s \pmod n$ ist nur von n, nicht aber von s abhängig; sie sei $\varrho(n)$.
3. $\varrho(n)$ ist eine distributive zahlentheoretische Funktion von n.
4. Es ist $\varrho(1) = 1$, $\varrho(2) = 2$, $\varrho(2^r) = 2^{r+1}\ (r \geqq 2)$,

$$\varrho(p^r) = p^{r-1}\left(p - \left(\frac{-1}{p}\right)\right)$$

$\left(p \text{ ungerade Primzahl}, \left(\frac{-1}{p}\right) \text{ Legendresches Symbol}\right)$.

Zu 2. Wir ordnen jedem in Betracht kommenden Restklassenpaar (x, y) die äquiforme Matrix $\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ zu.[1]) Ihre Determinante ist $x^2 + y^2$. Diese Matrizen bilden eine abelsche Gruppe $\mathfrak{M}$; sie wird durch die Determinanten homomorph auf die Gruppe $\mathfrak{R}$ der darstellbaren Restklassen abgebildet. Der Kern dieses Homomorphismus ist die (mod n) orthogonale Gruppe $\mathfrak{O}$ der Darstellungen der Restklasse 1 (mod n). Die Ordnung von $\mathfrak{O}$ sei $\varrho(n)$. Die Darstellungen der Restklassen s erscheinen als Nebengruppen nach $\mathfrak{O}$; die Anzahl ihrer Elemente ist von s unabhängig. Alle Restklassen, die überhaupt darstellbar, sind also gleich oft darstellbar.

Zu 3. Ist $n = n_1 \cdot n_2$ mit $(n_1, n_2) = 1$, so entsprechen sich die Restklassenpaare $(x, y) \pmod n$ und die Paare von Restklassenpaaren $(x_1, y_1) \pmod{n_1}$ und $(x_2, y_2) \pmod{n_2}$ eindeutig. Es ist also $\varrho(n) = \varrho(n_1) \cdot \varrho(n_2)$.

Zu 1. Wir müssen noch zeigen, daß sich jede der erwähnten Restklassen überhaupt darstellen läßt. Nach 3.) genügt es, sich auf den Fall $n = p^r$ (p = Primzahl) zu beschränken.

---

[1]) Ist -1 quadratischer Nichtrest mod n, so sind diese Matrizen den komplexen Restklassen $x + iy$ eineindeutig zugeordnet.

a) Es sei $p=2$. Für $r=1$ und 2 ist nichts zu beweisen. Für $r \geqq 3$ sind alle Zahlen s, für die $s \equiv 1 \pmod 8$ ist, quadratische Reste $s \equiv q^2(2^r)$ und gestatten die Darstellung $s \equiv q^2+0^2 \pmod{2^r}$. Die anderen Restklassen haben die Form $s \equiv q^2+4 \pmod{2^r}$, und dies ist ebenfalls eine Darstellung.

b) p sei ungerade. Ist dann $s \pmod p$ darstellbar, so auch $\pmod{p^r}$. Ist $\left(\frac{s}{p}\right)=1$, so ist $s \equiv q^2 \pmod p$ und $s \equiv q^2+0^2 \pmod{p^r}$ ist eine Darstellung.

In der Reihe der Restklassen $1, 2, \ldots, p-1$ muß mindestens einmal auf einen Rest ein Nichtrest folgen. Es gibt also einen solchen quadratischen Rest q_1^2, daß $N_1=q_1^2+1$ ein Nichtrest $\pmod p$ ist. N_1 gestattet also eine Darstellung. Jeder andere Nichtrest N entsteht aus N_1 durch Multiplikation mit einem quadratischen Rest q^2 und gestattet die Darstellung $N \equiv (q q_1)^2+q^2 \pmod p$.

Zu 4. Es ist noch $\varrho(p^r)$ zu berechnen.

a) $p=2$. Es ist $\varrho(2)=2$. Für $r \geqq 2$ ist für die Hälfte der in Betracht kommenden Restklassenpaare x gerade und y ungerade. Da es 2^{r-1} gerade und ebensoviele ungerade Restklassen $\pmod{2^r}$ gibt, gibt es 2^{2r-2} Restklassenpaare, in denen die erste ungerade, die zweite gerade ist, also im ganzen 2^{2r-1} Paare. Da es nun 2^{r-2} solche Restklassen s gibt, für die $s \equiv 1 \pmod 4$, entfallen auf jede von ihnen 2^{r+1} Darstellungen.

b) p ungerade. Es gibt p^{2r} Zahlenpaare $\pmod{p^r}$; davon sind p^{2r-2} uneigentlich, d. h. $p|x$ und $p|y$. Es bleiben also $p^{2r-2}(p^2-1)$ eigentliche Zahlenpaare.

bα) Ist $p \equiv 3 \pmod 4$, so stellen sie alle eine zu p prime Restklasse dar. Deren Anzahl ist $\varphi(p^r)=p^{r-1}(p-1)$. Da sie sich gleich oft darstellen lassen, entfallen auf jede von ihnen $\varrho(p^r)=p^{r-1}(p+1)$ Darstellungen.

bβ) Ist $p \equiv 1 \pmod 4$, so ist $-x^2$ quadratischer Rest, und es gibt zu jedem der $p^{r-1}(p-1)$ möglichen Werte von x noch $2p^{r-1}$ solche Werte von y, daß $x^2+y^2 \equiv 0 \pmod p$. Für die zu p teilerfremden Restklassen bleiben also nur $p^{2r+2}(p^2-1)-2p^{2r-2}(p-1)=p^{2r-2}(p-1)^2$ Restklassenpaare zur Verfügung. Jede der $p^{r+1}(p-1)$ zu p teilerfremden Restklassen gestattet also noch $\varrho(p^r)=p^{r-1}(p-1)$ Darstellungen.

Bemerkung. Es sei $\mathfrak{U}$ die Untergruppe

$$\mathfrak{U}=\left\{\pm\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ \pm\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\right\}.$$

Die Nebengruppen von $\mathfrak{M}/\mathfrak{U}$ sind dann

$$\left\{\pm\begin{pmatrix}x & y\\ -y & x\end{pmatrix},\ \pm\begin{pmatrix}y & -x\\ x & y\end{pmatrix}\right\}.$$

Ihre Elemente unterscheiden sich nur unwesentlich. $\mathfrak{M}/\mathfrak{U}$ wird ebenfalls auf $\mathfrak{R}$ homomorph abgebildet. Die Anzahl der dann noch verschiedenen Darstellungen irgend einer Restklasse ist dann $\frac{\varrho(n)}{4}$. Dabei sind die Paare $(0, x)$, $(x, \pm x)$ und, falls $2|n$, $\left(\frac{n}{2}, x\right)$ je einfach, die Paare aber (x, y) mit $2x, 2y, x \pm y \not\equiv 0 \pmod n$ je doppelt, nämlich einmal als (x, y) und einmal als (y, x) zu zählen.

(Eingegangen am 29. Januar 1964)

АВТОМАТЫ И ПОЛУГРУППЫ. I

И. ПЕАК (Сегед) *)

В статье В. М. Глушкова [2] изложены некоторые связи между автоматами и полугруппами с абстрактной точки зрения. Целью настоящей работы является продолжение этих исследований в подобном духе.

1. Прежде всего мы перечислаем нужные для нас понятия, определения и обозначения.

Автоматом называется объект $A=(\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \delta)$, состоящий из двух непустых множеств $\mathfrak{A}, \mathfrak{X}$ и функции $\delta(a, x)\in\mathfrak{A}$ $(a\in\mathfrak{A}, x\in\mathfrak{X})$, определенной на этих множествах. Множества $\mathfrak{A}, \mathfrak{X}$ и функция $\delta(a, x)$ называются множеством состояний, множеством входных сигналов и функцией переходов, соответственно.

В случае произвольного автомата $A=(\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \delta)$ для данного состояния a $(\in\mathfrak{A})$ и данного слова $p=x_1x_2\dots x_k$ $(\in F(\mathfrak{X}))$[1]) мы определим новое состояние автомата A, обозначенное через ap, следующим образом: сперва мы расширим естественным способом область определения функции переходов $\delta(a, x)$ автомата A с множества $\mathfrak{A}\times\mathfrak{X}$ на множество $\mathfrak{A}\times F(\mathfrak{X})$ так, что для любого a $(\in\mathfrak{A})$ и $p=x_1x_2\dots x_k$ $(\in F(\mathfrak{X}))$ пусть $\delta(a, p)=a_1a_2\dots a_k$, где $a_1=\delta(a, x_1)$, $a_2=\delta(a_1, x_2), \dots, a_k=\delta(a_{k-1}, x_k)$, а затем мы полагаем $ap=a_k$.

В статье В. М. Глушкова [2] для каждого автомата A определена некоторая полугруппа, принадлежащая автомату A, которую мы условимся обозначать через $S(A)$. Для произвольного автомата A, полугруппа $S(A)$ определяется следующим образом: Каждый автомат $A=(\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \delta)$ индуцирует в свободной полугруппе $F(\mathfrak{X})$ без единицы некоторое отношение конгруентности $\varrho(A)$:

$$p\equiv q(\varrho(A))\Leftrightarrow \underset{a\in\mathfrak{A}}{\forall}\, a[ap=aq] \qquad (p, q\in F(\mathfrak{X})).$$

Полугруппа $S(A)$ определяется теперь, как полугруппа, изоморфная факторполугруппе $F(\mathfrak{X})/\varrho(A)$ свободной полугруппы $F(\mathfrak{X})$ без единицы, по отношению конгруентности $\varrho(A)$, индуцируемому автоматом A.

Пусть заданы полугруппы $S, S_1, \dots, S_n$. Через $S\cong S_1\otimes\dots\otimes S_n$ обозначается то обстоятельство, что полугруппа S является прямым произведением полугрупп $S_1, \dots, S_n$, т. е. полугруппа S изоморфна полугруппе $S_1\times\dots\times S_n$

---

*) I. Peák (Szeged).

[1]) Здесь, и везде в этой статье, через $F(\mathfrak{X})$ обозначается свободная полугруппа без единицы в алфавите $\mathfrak{X}$.

всех векторов $(s_1, \ldots, s_n)$ $(s_i \in S_i)$, умножение в которой определяется с помощью уравнений

$$(s_1, \ldots, s_n)(r_1, \ldots, r_n) = (s_1 r_1, \ldots, s_n r_n) \qquad (s_i, r_i \in S_i).$$

Говорят, что полугруппа S является подпрямым произведением полугрупп $S_1, \ldots, S_n$, если S изоморфно некоторой подполугруппе S' прямого произведения $S_1 \otimes \ldots \otimes S_n$ и для всякого элемента s_i из S_i найдется элемент $(s'_1, \ldots, s'_n)$ полугруппы S', для которого $s'_i = s_i$. (См. Г. Биркгоф [1].)

Существует несколько известных композиций, при помощи которых из наперед заданных автоматов можно строить новый автомат. Такими композициями являются например: прямая сумма (прямое разложение), прямое произведение и (общее) произведение автоматов.

Теперь сформулируем поставленную нами задачу:

Пусть автомат A составленной из некоторых автоматов $A_1, \ldots, A_n$ при помощи какой-нибудь из только-что перечисленных композиций. Спрашивается, какие связи можно установить между полугруппой $S(A)$, с одной стороны, и полугруппами $S(A_1), \ldots, S(A_n)$, — с другой.

2. Автомат $A_1 = (\mathfrak{A}_1, \mathfrak{X}_1, \delta_1)$ называется подавтоматом автомата $A = (\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \delta)$, если $\mathfrak{A}_1 \subseteqq \mathfrak{A}$, $\mathfrak{X}_1 \subseteqq \mathfrak{X}$ имеет место и функции переходов δ_1 и δ совпадают на множестве $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{X}_1 (\subseteqq \mathfrak{A} \times \mathfrak{X})$. Автомат A назовем $\mathfrak{A}$-подавтоматом автомата A', если A является подавтоматом автомата A' и при этом множество входных сигналов автомата A совпадает с множеством входных сигналов автомата A'. Аналогичным образом понимается $\mathfrak{X}$-подавтомат автомата.

Мы говорим, что автомат $A = (\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \delta)$ разлагается в прямую сумму его $\mathfrak{A}$-подавтоматов $A_i = (\mathfrak{A}_i, \mathfrak{X}, \delta_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$, и пишем $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$, если $\bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{A}_i = \mathfrak{A}$ имеет место. Разложение автомата $A = (\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \delta)$ в прямую сумму его $\mathfrak{A}$-подавтоматов $A_i = (\mathfrak{A}_i, \mathfrak{X}, \delta_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ называется разложением типа $\mathscr{P}$, если для всякой последовательности слов $p_1, \ldots, p_n$ свободной полугруппы $F(\mathfrak{X})$ существует слово $p\,(\in F(\mathfrak{X}))$, удовлетворяющее условию $\forall_{i=1,\ldots,n}\, i\ \forall_{a \in \mathfrak{A}_i}\, a[ap_i = ap]$.

Легко доказывается следующая

Лемма 1. (См. также Г. Биркгоф [1], гл. VI, § 6.) *Пусть задано некоторое множество $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$ отношений конгруентности в полугруппе S. Если $\varrho = \varrho_1 \cap \ldots \cap \varrho_n$, тогда полугруппа S/ϱ является подпрямым произведением полугрупп $S/\varrho_1, \ldots, S/\varrho_n$.*

Доказательство. Так как пересечение ϱ отношений конгруентности $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$ опять является отношением конгруентности, то фактор-полугруппа S/ϱ существует. Элементами полугрупп S/ϱ и $S/\varrho_1, \ldots, S/\varrho_n$ являются все классы $C_\varrho, C_{\varrho_1}, \ldots C_{\varrho_n}$ исходной полугруппы S по отношениям конгруентности ϱ и $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$, соответственно. По определению ϱ для каждого C_ϱ существует последовательность классов $C_{\varrho_1}, \ldots, C_{\varrho_n}$, для которых имеет место

$$C_{\varrho_1} \cap \ldots \cap C_{\varrho_n} = C_\varrho. \tag{1}$$

Возьмем для каждого C_ϱ последовательность классов $C_{\varrho_1}, \ldots, C_{\varrho_n}$, удовлетворяющую условию (1) и определим отображение

$$C_\varrho \to (C_{\varrho_1}, \ldots, C_{\varrho_n}) \qquad (C_{\varrho_1} \cap \ldots \cap C_{\varrho_n} = C_\varrho). \tag{2}$$

Очевидно, что отображение (2) является взаимно однозначным и оно отображает полугруппу S/ϱ в полугруппу $S/\varrho_1 \otimes \ldots \otimes S/\varrho_n$. Покажем теперь, что (2) являяется гомоморфным отображением. Пусть еще для этой цели

$$C'_\varrho \to (C'_{\varrho_1}, \ldots, C'_{\varrho_n}) \qquad (C'_{\varrho_1} \cap \ldots \cap C'_{\varrho_n} = C'_\varrho).$$

Тогда из $C_\varrho \subseteqq C_{\varrho_i}$, $C'_\varrho \subseteqq C'_{\varrho_i}$ $(i=1, \ldots, n)$ следует $C_\varrho C'_\varrho \subseteqq C_{\varrho_i} C'_{\varrho_i}$ $(i=1, \ldots, n)$, и поэтому $C_\varrho C'_\varrho \subseteqq C_{\varrho_1} C'_{\varrho_1} \cap \ldots \cap C_{\varrho_n} C'_{\varrho_n}$, т. е. $C_\varrho C'_\varrho = C_{\varrho_1} C'_{\varrho_1} \cap \ldots \cap C_{\varrho_n} C'_{\varrho_n}$, откуда мы получаем

$$C_\varrho C'_\varrho \to (C_{\varrho_1} C'_{\varrho_1}, \ldots, C_{\varrho_n} C'_{\varrho_n}) = (C_{\varrho_1}, \ldots, C_{\varrho_n})(C'_{\varrho_1}, \ldots, C'_{\varrho_n}),$$

и это означает, что взаимно однозначное отображение (2) является изоморфизмом полугруппы S/ϱ в полугруппу $S/\varrho_1 \otimes \ldots \otimes S/\varrho_n$.

Пусть S' обозначает подполугруппу прямого произведения $S/\varrho_1 \otimes \ldots$ $\ldots \otimes S/\varrho_n$, изоморфную полугруппе S/ϱ при изоморфизме (2). Иначе говоря, пусть S' есть полугруппа всех векторов $(C_{\varrho_1}, \ldots, C_{\varrho_n})$, удовлетворяющих условию (1). Выберем теперь произвольный элемент C_{ϱ_i} из полугруппы S/ϱ_i. Тогда найдется некоторый класс C_ϱ в S так, что $C_\varrho \subseteqq C_{\varrho_i}$ и существует последовательность классов $C'_{\varrho_1}, \ldots, C'_{\varrho_n}$, для которых имеет место $C_\varrho = C'_{\varrho_1} \cap \ldots \cap C'_{\varrho_n}$. Тогда из $C_\varrho \subseteqq C_{\varrho_i}$ и $C_\varrho \subseteqq C'_{\varrho_i}$ следует $C'_{\varrho_i} = C_{\varrho_i}$. И так мы получили, что для произвольного элемента C_{ϱ_i} $(\in S/\varrho_i)$ найдется элемент $(C'_{\varrho_1}, \ldots, C'_{\varrho_n})$ из S', для которого $C'_{\varrho_i} = C_{\varrho_i}$. Это именно означает, что полугруппа S/ϱ является подпрямым произведением полугрупп $S/\varrho_1, \ldots, S/\varrho_n$. Лемма 1 доказана.

Теорема 1. *Если автомат A разлагается в прямую сумму его $\mathfrak{A}$-подавтоматов $A_1, \ldots, A_n$, тогда полугруппа $S(A)$ является подпрямым произведением полугрупп $S(A_1), \ldots, S(A_n)$.*

Доказательство. Пусть автомат $A = (\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \delta)$ разлагается в прямую сумму его $\mathfrak{A}$-подавтоматов $A_i = (\mathfrak{A}_i, \mathfrak{X}, \delta_i)$ $(i=1, \ldots, n)$. Возьмем свободную полугруппу $F = F(\mathfrak{X})$ в алфавите $\mathfrak{X}$. Каждый $\mathfrak{A}$-подавтомат A_i индуцирует в F некоторое отношение конгруентности $\varrho_i = \varrho(A_i)$, соответственная фактор-полугруппа F/ϱ_i которому изоморфна полугруппе $S(A_i)$, принадлежащей автомату A_i, т. е.

$$F/\varrho_i \cong S(A_i). \tag{3}$$

Рассмотрим теперь отношение конгруентности ϱ $(=\varrho_1 \cap \ldots \cap \varrho_n)$ в полугруппе F и возьмем фактор-полугруппу F/ϱ. По лемме 1 из (3) следует что, F/ϱ является подпрямым произведением полугрупп $S(A_1), \ldots, S(A_n)$.

Чтобы закончить доказательство теоремы 1, достаточно еще показать, что отношение конгруентности ϱ совпадает с отношением конгруентности $\varrho(A)$, индуцируемым автоматом A в свободной полугруппе F. А это легко получается следующим образом: для всякой пары слов $p, q\ (\in F)$ имеет место

$$p \equiv q(\varrho(A)) \Leftrightarrow \underset{a \in \mathfrak{A}}{\forall}\ a[ap = aq] \Leftrightarrow \underset{i=1,\dots,n}{\forall}\ i\ \underset{a \in \mathfrak{A}_i}{\forall}\ a[ap = aq] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underset{i=1,\dots,n}{\forall}\ i[p \equiv q(\varrho(A_i))] \Leftrightarrow p \equiv q\Big(\bigcap_{i=1}^{n} \varrho(A_i)\Big) \Leftrightarrow p \equiv q(\varrho).$$

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть автомат A разлагается в прямую сумму некоторых его $\mathfrak{A}$-подавтоматов $A_1, \dots, A_n$. Если разложение $A = A_1 \oplus \dots \oplus A_n$ автомата A является разложением типа $\mathscr{P}$, то $S(A) \cong S(A_1) \otimes \dots \otimes S(A_n)$.*

Доказательство. Пусть автомат $A = (\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \delta)$ разлагается в прямую сумму его $\mathfrak{A}$-подавтоматов $A_i = (\mathfrak{A}_i, \mathfrak{X}, \delta_i)$ $(i = 1, \dots, n)$. Тогда по теореме 1 полугруппа $S(A)$ изоморфна некоторой подполугруппе прямого произведения $S(A_1) \otimes \dots \otimes S(A_n)$ и по доказательству леммы 1 некоторым изоморфизмом полугруппы $S(A)$ в $S(A_1) \otimes \dots \otimes S(A_n)$ может служить отображение

$$C_\varrho \to (C_{\varrho_1}, \dots, C_{\varrho_n}), \tag{4}$$

где C_ϱ — произвольный класс эквивалентности в $F(\mathfrak{X})$ по отношению конгруентности $\varrho = \varrho(A)$ и C_{ϱ_i} $(i = 1, \dots, n)$ — все классы эквивалентности в $F(\mathfrak{X})$ по отношениям конгруентности $\varrho_i = \varrho(A_i)$, пересечение $C_{\varrho_1} \cap \dots \cap C_{\varrho_n}$ которых является непустым, а именно $C_{\varrho_1} \cap \dots \cap C_{\varrho_n} = C_\varrho$.

Для доказательства теоремы 2 достаточно еще показать, что отображение (4) отображает полугруппу $S(A)$ *на* полугруппу $S(A_1) \otimes \dots \otimes S(A_n)$ тогда и только тогда, если разложение $A = A_1 \oplus \dots \oplus A_n$ автомата A является разложением типа $\mathscr{P}$.

То, что (4) отображает полугруппу $S(A)$ *на* $S(A_1) \otimes \dots \otimes S(A_n)$ означает, что для всякой последовательности классов $C_{\varrho_1}, \dots, C_{\varrho_n}$ пересечение $C_{\varrho_1} \cap \dots \cap C_{\varrho_n}$ является непустым, т. е. для всякой последовательности слов $p_1, \dots, p_n$ $(\in F(\mathfrak{X}))$ найдется слово p $(\in F(\mathfrak{X}))$, удовлетворяющее условиям $p_i = p(\varrho_i)$ $(i = 1, \dots, n)$, иначе говоря, что для всякой последовательности слов $p_1, \dots, p_n$ $(\in F(\mathfrak{X}))$ найдется слово p $(\in F(\mathfrak{X}))$ таково, что $\underset{a \in \mathfrak{A}_i}{\forall}\ a\,[ap_i = ap]$ имеет место для каждого $i\ (= 1, \dots, n)$. А это именно означает, что разложение $A = A_1 \oplus \dots \oplus A_n$ автомата A является разложением типа $\mathscr{P}$. С этим завершается доказательство теоремы 2.

3. Прямым произведением нескольких автоматов $A_i = (\mathfrak{A}_i, \mathfrak{X}_i, \delta_i)$ $(i = 1, \dots, n)$ называется автомат $A = (\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \delta)$, у которого

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \times \dots \times \mathfrak{A}_n, \quad \mathfrak{X} = \mathfrak{X}_1 \times \dots \times \mathfrak{X}_n$$

и функция переходов δ определяется следующим образом:

$$\delta((a_1, \dots, a_n), (x_1, \dots, x_n)) = (\delta_1(a_1, x_1), \dots, \delta_n(a_n, x_n)) \qquad (a_i \in \mathfrak{A}_i,\ x_i \in \mathfrak{X}_i).$$

Теорема 3. *Если автомат A является прямым произведением автоматов $A_1, \dots, A_n$, тогда полугруппа $S(A)$ является подпрямым произведением полугрупп $S(A)_1, \dots, S(A_n)$.*

Доказательство. Пусть автомат $A=(\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \delta)$ является прямым произведением автоматов $A_i=(\mathfrak{A}_i, \mathfrak{X}_i, \delta_i)$ $(i=1, \ldots, n)$.

Каждое слово p $(\in F(\mathfrak{X}))$ создается в виде

$$p=(x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)})(x_1^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)})\ldots(x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}) \tag{5}$$

приписывания букв $(x_1^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)})$ $(j=1, \ldots, k)$, входящих в алфавит $\mathfrak{X}$. Мы конструируем следующее отображение: каждому слову p $(\in F(\mathfrak{X}))$ вида (5) мы сопоставляем элемент

$$(x_1^{(1)}x_1^{(2)}\ldots x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(1)}x_n^{(2)}\ldots x_n^{(k)})$$

полугруппы $F(\mathfrak{X}_1)\otimes\ldots\otimes F(\mathfrak{X}_n)$. Заметим, что при этом отображении длины слов $x_i^{(1)}x_i^{(2)}\ldots x_i^{(k)}$ $(\in F(\mathfrak{X}_i))$ равняются между собой для всех i $(=1, \ldots, n)$. С этим задано некоторое однозначное отображение

$$p\to(p_1, \ldots, p_n) \qquad (p\in F(\mathfrak{X});\ p_i\in F(\mathfrak{X}_i)) \tag{6}$$

свободной полугруппы $F(\mathfrak{X})$ на подмножество прямого произведения $F(\mathfrak{X}_1)\otimes\ldots\otimes F(\mathfrak{X}_n)$, состоящее из векторов $(p_1, \ldots, p_n)$ $(p_i\in F(\mathfrak{X}_i))$, обладающих свойством $|p_1|=\ldots=|p_n|$.[2])

Легко видеть, что отображение (6) является изоморфизмом свободной полугруппы $F(\mathfrak{X})$ в $F(\mathfrak{X}_1)\otimes\ldots\otimes F(\mathfrak{X}_n)$, и если при отображении (6)

$$p\to(p_1, \ldots, p_n),\ q\to(q_1, \ldots, q_n) \qquad (p, q\in F(\mathfrak{X});\ p_i, q_i\in F(\mathfrak{X}_i)),$$

тогда

$$p\equiv q(\varrho(A))\Leftrightarrow \underset{i=1,\ldots,n}{\forall} i[p_i\equiv q_i(\varrho(A_i))]. \tag{7}$$

При помощи отображения (6) мы задаем некоторый изоморфизм полугруппы $S(A)$ в прямое произведение $S(A_1)\otimes\ldots\otimes S(A_n)$. Элементами полугруппы $S(A)$ являются все классы эквивалентности C_ϱ в $F(\mathfrak{X})$ по отношению конгруентности $\varrho=\varrho(A)$, а элементами полугруппы $S(A_i)$ являются все классы эквивалентности C_{ϱ_i} в $F(\mathfrak{X}_i)$ по отношению конгруентности $\varrho_i=\varrho(A_i)$ $(i=1, \ldots, n)$. Чтобы задать искомый изоморфизм полугруппы $S(A)$ в $S(A_1)\otimes\ldots$ $\ldots\otimes S(A_n)$, мы используем следующее обозначение: если в произвольной полугруппе S задано некоторое отношение конгруентности τ, тогда пусть $C_\tau[s]$ обозначает класс эквивалентности по τ в полугруппе S, содержащий элемент s $(\in S)$. С помощью такого обозначения мы сформулируем отображение

$$C_\varrho[p]\to(C_{\varrho_1}[p_1], \ldots, C_{\varrho_n}[p_n]) \qquad (p\in F(\mathfrak{X});\ p_i\in F(\mathfrak{X}_i)), \tag{8}$$

где вектор $(p_1, \ldots, p_n)$ является элементом прямого произведения $F(\mathfrak{X}_1)\otimes\ldots$ $\ldots\otimes F(\mathfrak{X}_n)$, сопоставленным слову p $(\in F(\mathfrak{X}))$ при отображении (6).

Из того, что (7) имеет место и отображение (6) является изоморфным отображением $F(\mathfrak{X})$ в $F(\mathfrak{X}_1)\otimes\ldots\otimes F(\mathfrak{X}_n)$ легко получается, что отображение (8) служит изоморфизмом полугруппы $S(A)$ в прямое произведение $S(A_1)\otimes\ldots$ $\ldots\otimes S(A_n)$.

[2]) Для произвольного слова q через $|q|$ обозначается длина этого же слова (т. е. число букв, входящих в слово q).

Чтобы закончить доказательство теоремы 3, осталось еще показать, что в случае каждого фиксированного $i(=1, \ldots, n)$, для всякого элемента C_{ϱ_i} $(\in S(A_i))$ найдется элемент C_ϱ $(\in S(A))$, образ при (8) которого имеет i-тую компоненту, совпадаюшую с заданным C_{ϱ_i}. К нахождению такого C_ϱ мы возьмем какое-нибудь слово p_i $(\in F(\mathfrak{X}_i))$ из класса эквивалентности C_{ϱ_i} и выберем слова $p_1, \ldots, p_{i-1}, p_{i+1}, \ldots, p_n$ из свободных полугрупп $F(\mathfrak{X}_1), \ldots, F(\mathfrak{X}_{i-1}), F(\mathfrak{X}_{i+1}), \ldots, F(\mathfrak{X}_n)$, соответственно, длины которых равны длине слова p_i. Выберем теперь слово p $(\in F(\mathfrak{X}))$ так, что для слов p и $p_1, \ldots, p_n$ имело место (6). Тогда вектор $(C_{\varrho_1}[p_1], \ldots, C_{\varrho_n}[p_n])$ является образом элемента $C_\varrho[p]$ $(\in S(A))$ при изоморфизме (8) и имеет i-тую компоненту C_{ϱ_i} $(=C_{\varrho_i}[p_i])$. С этим мы получили, что полугруппа $S(A)$ является подпрямым произведением полугрупп $S(A_1), \ldots, S(A_n)$. Теорема 3 доказана.

Спрашивается теперь, при каких условиях будет отображение (8) изоморфизмом полугруппы $S(A)$ *на* прямое произведение $S(A_1)\otimes\ldots\otimes S(A_n)$. Пусть $(C_{\varrho_1}[p_1], \ldots, C_{\varrho_n}[p_n])$ произвольный элемент из $S(A_1)\otimes\ldots\otimes S(A_n)$. Из построения отображения (6) сразу видно, что элемент $(C_{\varrho_1}[p_1], \ldots, C_{\varrho_n}[p_n])$ может являться образом некоторого элемента $C_\varrho[p]$ из $S(A)$ при отображении (8) в том и только в том случае, если найдутся слова $p_1', \ldots, p_n'$ $(p_i' \in F(\mathfrak{X}_i))$ равной длины так, что $C_{\varrho_i}[p_i] = C_{\varrho_i}[p_i']$ имеет место для каждого i $(=1, \ldots, n)$. Отсюда получается следующая

Теорема 4. *Для автомата $A=(\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \delta)$, являющегося прямым произведением автоматов $A_i=(\mathfrak{A}_i, \mathfrak{X}_i, \delta_i)$ $(i=1, \ldots, n)$, имеет место $S(A)\cong S(A_1)\otimes\ldots\otimes S(A_n)$, если для всякой последовательности слов $p_1, \ldots, p_n$ $(p_i\in F(\mathfrak{X}_i))$ найдутся слова $p_1', \ldots, p_n'$ $(p_i'\in F(\mathfrak{X}_i))$ равной длины, удовлетворяющие условию $\underset{i=1,\ldots,n}{\forall} i \underset{a\in\mathfrak{A}_i}{\forall} a\,[ap_i = ap_i']$.*

Из теоремы 4 легко вытекает нижеследующее простое

Следствие. *Если автомат $A=(\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \delta)$, являющийся прямым произведением автоматов $A_i=(\mathfrak{A}_i, \mathfrak{X}_i, \delta_i)$ $(i=1, \ldots, n)$ имеет входный сигнал $x(\in\mathfrak{X})$, удовлетворяющий условию $\underset{a\in\mathfrak{A}}{\forall} a[\delta(a, x)=a]$, то $S(A)\cong S(A_1)\otimes\ldots\otimes S(A_n)$.*

Действительно, при таких условиях и для каждого автомата A_i тоже найдется входный сигнал $x_i(\in\mathfrak{X}_i)$, для которого имеет место $\underset{a\in\mathfrak{A}_i}{\forall} a[\delta_i(a, x_i)=a]$. Возьмем теперь произвольную последовательность слов $p_1, \ldots, p_n$ $(p_i\in F(\mathfrak{X}_i);$ $|p_i|=l_i$ $(i=1, \ldots, n))$. Если для некоторого $k(1\leqq k\leqq n)$ имеет место $l_k\geqq l_i$ $(i=1, \ldots, n)$, тогда после приписывания (скажем справа) символа x_i к слову p_i (l_k-l_i)-раз, мы получим последовательность слов $p_1', \ldots, p_n'$ $(p_i\in F(\mathfrak{X}_i))$ равной длины $(|p_1'|=\ldots=|p_n'|=l_k)$, удовлетворяющих условую $\underset{i=1,\ldots,n}{\forall} i \underset{a\in\mathfrak{A}_i}{\forall} a[ap_i = ap_i']$. Следовательно, по теореме 4 имеет место $S(A)\cong S(A_1)\otimes\ldots\otimes S(A_n)$.

4. Пусть задано множество автоматов $A_i=(\mathfrak{A}_i, \mathfrak{X}_i, \delta_i)$ $(i=1, \ldots, n)$, и возьмем произвольное множество $\mathfrak{X}$ и некоторое однозначное отображение φ множества $\mathfrak{A}_1\times\ldots\times\mathfrak{A}_n\times\mathfrak{X}$ в множество $\mathfrak{X}_1\times\ldots\times\mathfrak{X}_n$. Исходя из автоматов $A_1, \ldots, A_n$ с помощью заданных $\mathfrak{X}$ и φ мы строим новый автомат A, называемый (общим) произведением автоматов $A_1, \ldots, A_n$ (при заданных $\mathfrak{X}$ и φ): Произведение автоматов $A_1, \ldots, A_n$ при заданных $\mathfrak{X}$ и φ представляет собой автомат A, у которого множество состояний совпадает с произведением $\mathfrak{A}_1\times\ldots\times\mathfrak{A}_n$ множеств состояний автоматов $A_1, \ldots, A_n$, множеством входных сигналов является множество $\mathfrak{X}$ и функция переходов δ определяется следующим образом: для всякой пары $(a_1, \ldots, a_n)$ $(\in\mathfrak{A}_1\times\ldots\times\mathfrak{A}_n)$, $x(\in\mathfrak{X})$ мы полагаем

$$\delta((a_1, \ldots, a_n), x)=(\delta_1(a_1, x_1), \ldots, \delta_n(a_n, x_n)),$$

где $(x_1, \ldots, x_n)$ является образом элемента $(a_1, \ldots, a_n, x)$ при отображении φ, т. е. $(x_1, \ldots, x_n)=\varphi(a_1, \ldots, a_n, x)$. Мы подчеркиваем, что произведение наперед заданных автоматов не определяется однозначным образом этими автоматами, потому что оно зависит еще от некоторого множества $\mathfrak{X}$, играющего роль множества входных сигналов нового автомата и от некоторой функции φ, называемой функцией обратной связи этого же автомата.

Мы говорим, что автомат $A=(\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \delta)$ изоморфен автомату $A'=(\mathfrak{A}', \mathfrak{X}', \delta')$, если найдутся взаимно однозначные отображения χ_A и χ_x, удовлетворяющие условиям: χ_A отображает множество $\mathfrak{A}$ на множество $\mathfrak{A}'$, χ_x отображает множество $\mathfrak{X}$ на множество $\mathfrak{X}'$ и для всякой пары a $(\in\mathfrak{A})$, x $(\in\mathfrak{X})$ имеет место

$$\chi_A(\delta(a, x))=\delta'(\chi_A(a), \chi_x(x)). \tag{9}$$

В статье В. М. Глушкова [2] доказывается, что для произвольных, изоморфных между собой автоматов A и A' имеет место $S(A)\cong S(A')$. Нам хочется обобщить это утверждение для случая, когда автомат A изоморфен некоторому подавтомату автомата A'. Вообще говоря, из того, что автомат A изоморфен некоторому подавтомату автомата A', не следует, что полугруппа $S(A)$ изоморфно вложима в полугруппу $S(A')$[3]. В общем случае имеет место только следующая

Лемма 2. *Если автомат A изоморфен некоторому подавтомату автомата A', тогда полугруппа $S(A)$ является гомоморфным образом некоторой подполугруппы полугруппы $S(A')$.*

Доказательство. То, что автомат $A=(\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \delta)$ изоморфен некоторому подавтомату автомата $A'=(\mathfrak{A}', \mathfrak{X}', \delta')$ означает существование взаимно однозначных отображений χ_A и χ_x следующего вида: χ_A отображает мно-

[3]) Действительно, рассмотрим автомат

A':		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	x	1	0	3	2	5	8	7	10	9	4	11	6
	y	2	3	0	1	6	11	8	5	10	7	4	9

и возьмем его подавтомат

A:		0	1	2	3
	x	1	0	3	2
	y	2	3	0	1

Легко убедиться, что полугруппами $S(A')$ и $S(A)$ будут группа кватернионов и четверная группа Кэли, соответственно. Далее, первая из этих групп не содержит подгруппы, изоморфной второй.

жество $\mathfrak{A}$ в множество $\mathfrak{A}'$, χ_x отображает множество $\mathfrak{X}$ в множество $\mathfrak{X}'$ и для этих χ_A и χ_x имеет место (9). Расширим теперь область определения отображения χ_x с множества $\mathfrak{X}$ на множество $F(\mathfrak{X})$ следующим образом: для всякого слова $p=x_1x_2\ldots x_k\ (\in F(\mathfrak{X}))$ мы полагаем

$$\chi_x(p)=\chi_x(x_1)\chi_x(x_2)\ldots\chi_x(x_k). \tag{10}$$

Легко получается тогда, что для всякого $a(\in\mathfrak{A})$ и $p\ (\in F(\mathfrak{X}))$ имеет место

$$\chi_A(ap)=\chi_A(a)\chi_x(p)$$

Из этого следует, что для произвольных $p, q(\in F(\mathfrak{X}))$ имеет место следующее заключение:

$$\chi_x(p)\equiv\chi_x(q)\big(\varrho(A')\big)\Rightarrow p\equiv q\big(\varrho(A)\big). \tag{11}$$

Элементами полугруппы $S(A')$ являются все классы эквивалентности $C_{\varrho'}$ в свободной полугруппе $F(\mathfrak{X}')$ по отношению конгруентности $\varrho'=\varrho(A')$. Через $C_{\varrho'}[p']\big(p'\in F(\mathfrak{X}')\big)$ обозначается элемент полугруппы $S(A')$, являющийся классом эквивалентности в $F(\mathfrak{X}')$, содержащим слово $p'\big(\in F(\mathfrak{X}')\big)$.

Возьмем теперь отображение

$$p\to\chi_x(p)\qquad (p\in F(\mathfrak{X})) \tag{12}$$

и обозначим через S' множество классов эквивалентности $C_{\varrho'}$ в $F(\mathfrak{X}')$ по отношению конгруентности ϱ', содержащих слово $p'\big(\in F(\mathfrak{X}')\big)$, являющее образом некоторого слова $p\ (\in F(\mathfrak{X}))$ при отображении (12). Легко видно, что из $C_{\varrho'}, C'_{\varrho'}\in S'$ следует $C_{\varrho'}C'_{\varrho'}\in S'$, т. е. S' является подполугруппой полугруппы $S(A')$. Представим теперь каждый элемент $C_{\varrho'}$ полугруппы S' в виде $C_{\varrho'}=C_{\varrho'}[\chi_x(p)]$ при некотором $p\ (\in F(\mathfrak{X}))$ и возьмем отображение

$$C_{\varrho'}[\chi_x(p)]\to C_{\varrho}[p]. \tag{13}$$

Используя (10) и (11) легко убедиться, что (в общем случае не обезательно взаимно однозначное) отображение (13) является гомоморфным отображением подполугруппы S' полугруппы $S(A')$ на полугруппу $S(A)$. Лемма 2 доказана.

Используя лемму 2 получается

Лемма 3. *Если имеются автоматы A и A' с общим множеством состояний и автомат A изоморфен некоторому $\mathfrak{X}$-подавтомату автомата A', тогда полугруппа $S(A)$ изоморфна некоторой подполугруппе полугруппы $S(A')$.*

Доказательство. Будучи автомат $A=(\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \delta)$ изоморфен некоторому $\mathfrak{X}$-подавтомату автомата $A'=(\mathfrak{A}, \mathfrak{X}', \delta')$, существуют взаимно однозначные отображения χ_A и χ_x следующего вида: χ_A отображает множество $\mathfrak{A}$ на себя, χ_x отображает множество $\mathfrak{X}$ в множество $\mathfrak{X}'$ и для этих χ_A и χ_x имеет место (9). Пользуясь обозначениями доказательства леммы 2 легко видеть, что при условиях леммы 3, вместе с заключением (11) имеет место и обратное заключение

$$p\equiv q\big(\varrho(A)\big)\Rightarrow\chi_x(p)\equiv\chi_x(q)\big(\varrho(A')\big)\qquad (p, q\in F(\mathfrak{X})). \tag{14}$$

Из (14) следует, что отображение (13) является взаимно однозначным отображением, т. е. оно является изоморфизмом подполугруппы S' полугруппы $S(A')$ на полугруппу $S(A)$. С этим самым и лемма 3 доказана.

Докажем теперь следующую теорему:

Теорема 5. *Если автомат A является произведением автоматов $A_i = (\mathfrak{A}_i, \mathfrak{X}, \delta_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ с общим множеством входных сигналов $\mathfrak{X}$ при множестве $\mathfrak{X}$ и при функции обратной связи*

$$\varphi(a_1, \ldots, a_n, x) = (x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}) \qquad (a_i \in \mathfrak{A}_i;\ x, x^{(1)}, \ldots, x^{(n)} \in \mathfrak{X}),$$

удовлетворяющей условию

$$x^{(i)} \equiv x(\varrho(A_i)) \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

тогда полугруппа $S(A)$ изоморфна некоторой подполугруппе прямого произведения $S(A_1) \otimes \ldots \otimes S(A_n)$.

Доказательство. Пусть $A_1 \otimes \ldots \otimes A_n$ обозначает прямое произведение автоматов $A_1, \ldots, A_n$. Прежде всего заметим, что автоматы A и $A_1 \otimes \ldots \otimes A_n$ имеют общее множество состояний: $\mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_n$. Мы покажем, что автомат A изоморфен некоторому $\mathfrak{X}$-подавтомату автомата $A_1 \otimes \ldots \otimes A_n$. Для этой цели мы определим следующее отображение: через χ_A обозначим тождественное отображение множества $\mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_n$ на себя и через χ_A обозначается отображение $x \to (x, \ldots, x)$ $(x \in \mathfrak{X})$ множества $\mathfrak{X}$ в множество $\mathfrak{X} \times \ldots \times \mathfrak{X}$ (где $\mathfrak{X}$ взято n раз). Обозначим еще через δ и δ' функцию переходов автомата A и $A_1 \otimes \ldots \otimes A_n$, соответственно. Тогда для $(a_1, \ldots, a_n)$ $(\in \mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_n)$ и x $(\in \mathfrak{X})$ из

$$\chi_A(\delta((a_1, \ldots, a_n), x)) = \delta((a_1, \ldots, a_n), x) = (\delta_1(a_1, x^{(1)}), \ldots, \delta_n(a_n, x^{(n)})) =$$
$$= (\delta_1(a_1, x), \ldots, \delta_n(a_n, x)) = \delta'((a_1, \ldots, a_n), (x, \ldots, x)) = \delta'(\chi_A((a_1, \ldots, a_n)), \chi_x(x))$$

получается, что отображение, заданное выше, действительно может служить изоморфизмом автомата A на некоторый $\mathfrak{X}$-подавтомат автомата $A_1 \otimes \ldots \otimes A_n$.

Отсюда, используя лемму 3 и теорему 3 следует, что полугруппа $S(A)$ изоморфна некоторой подполугруппе прямого произведения $S(A_1) \otimes \ldots$ $\ldots \otimes S(A_n)$, что и требовалось доказать.

Литература

[1] Г. Биркгоф, *Теория структур* (Москва, 1952).
[2] В. М. Глушков, Абстрактная теория автоматов, *Успехи мат. наук*, **16:5 (101)** (1961), 3—62.

(Поступило 8/VI 1963)

ОБ АБЕЛЕВЫХ СВОЙСТВАХ ПРИМИТИВНЫХ КЛАССОВ УНИВЕРСАЛЬНЫХ АЛГЕБР

Б. ЧАКАНЬ (Сегед)*)

В предлагаемой работе приводятся доказательства некоторых утверждений, опубликованных в [7], а также сформулируется несколько замечаний, относящихся к затронутому там же кругу вопросов. Основные определения можно найти в работах [5], [6], на которые мы неоднократно будем ссылаться.

§ 1

Свойство, которым могут обладать примитивные классы алгебр, мы назовем *абелевым*, если оно характеризует среди примитивных классов групп примитивные классы абелевых групп.

Т. Ивэнс доказал абелевость каждого из следующих свойств [8]:

H. *В любой алгебре класса $\mathfrak{A}$ каждая подалгебра является классом некоторой конгруэнции.*

E. *Множество всех эндоморфизмов любой алгебры класса $\mathfrak{A}$ замкнуто относительно основных операций данного класса* (т. е., если ν — n-местная основная операция в классе $\mathfrak{A}$, A — алгебра в $\mathfrak{A}$, а $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ — эндоморфизмы алгебры A, то отображение A в себя $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n \nu$, определенное посредством $x(\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n \nu) = (x\varepsilon_1) \ldots (x\varepsilon_n)\nu$, $(x \in A)$, также является эндоморфизмом A).

S. *Множество всех подалгебр любой алгебры класса $\mathfrak{A}$ замкнуто относительно основных операций данного класса* (т. е., если ν — операция, как выше, $A_1, \ldots, A_n$ — подалгебры алгебры A в классе $\mathfrak{A}$, то все элементы вида $a_1 \ldots a_n \nu$ $(a_i \in A_i;\ i = 1, \ldots, n)$ образуют подалгебру в A. Для последней мы будем пользоваться естественным обозначением $A_1 \ldots A_n \nu$.)

Далее, рассмотрим свойство (см. [4])

T. *В классе $\mathfrak{A}$ прямое и свободное произведения двух алгебр совпадают.*

Оно также является абелевым, как это легко следует из абелевости свойства H и из теоремы 2 в [6].

В [6] дано описание примитивных классов со свойством H, а также со свойством T, при некоторых дополнительных условиях. Сейчас мы распространим наши исследования и на классы, обладающие свойством E,

*) B. Csákány (Szeged)

соотв. S. Кроме приведенных мы будем рассматривать и следующие свойства примитивных классов:

O. *В классе* $\mathfrak{A}$ *существует опорная операция* (т. е. нульместная операция, которая отмечает одноэлементную подалгебру во всех алгебрах класса $\mathfrak{A}$).

N. *Класс* $\mathfrak{A}$ *нормальный* [1] (т. е. в любой алгебре класса $\mathfrak{A}$ все конгруэнции перестановочны между собой).

QR. *В любой алгебре класса* $\mathfrak{A}$ *каждая конгруэнция однозначно определяется своим классом, содержащим опорный элемент* (т. е. элемент, отмеченный опорной операцией).

P. *В классе* $\mathfrak{A}$ *существует* (в общем случае главная производная) *операция* $xy\psi$, *определяющая вид конгруэнций во всех алгебрах класса* $\mathfrak{A}$ [11]. Это значит, что каждая конгруэнция φ произвольной алгебры A класса $\mathfrak{A}$ обладает таким классом N_φ, что $a \equiv b(\varphi)$ $(a, b \in A)$ тогда и только тогда, если $ab\psi \in N_\varphi$.

§ 2

Следуя Б. И. Плоткину [3], m-местную основную операцию μ алгебры A назовем перестановочным с n-местной основной операцией ν той же алгебры, если для любых $a_{ij} \in A$ $(i=1, \ldots, m;\ j=1, \ldots, n)$ выполняется равенство $(a_{11} \ldots a_{1n}\nu) \ldots (a_{m1} \ldots a_{mn}\nu)\mu = (a_{11} \ldots a_{m1}\mu) \ldots (a_{1n} \ldots a_{mn}\mu)\nu$. Если любые две основные операции алгебры A перестановочны (не исключая при этом одинаковых операций), то A называется *коммутативной*.

Оказывается, что примитивный класс $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда обладает свойством E, если каждая алгебра в $\mathfrak{A}$ коммутативна. При доказательстве этого утверждения, обобщающего теорему I из [8], в которой описаны примитивные классы группоидов со свойством E, без существенного видоизменения можно применить метод, использованный в [8], и поэтому мы его проводить не будем. Следует лишь отметить, что понятие коммутативной алгебры является естественным обобщением понятия энтропического группоида.

Далее, имеет место

Теорема 1. *Примитивный класс* $\mathfrak{A}$ *тогда и только тогда обладает свойствами* O, N, E, *если* $\mathfrak{A}$ *эквивалентен*) классу* $\mathfrak{R}$ *всех унитарных правых модулей над некоторым коммутативным кольцом с единицей* R.

Доказательство. Сперва рассмотрим примитивный класс $\mathfrak{A}$ со свойствами O, N, E. Как показано в [1], свойство N влечет за собой существование в $\mathfrak{A}$ трехместной операции μ с тождеством

$$xyy\mu = yyx\mu = x. \tag{1}$$

Обозначим опорный элемент во всех алгебрах класса $\mathfrak{A}$ символом 0. Для операции $x0y\mu$ введем новое обозначение $x+y$. Ввиду (1) в $\mathfrak{A}$ тождест-

*) В [7] речь шла о рациональной эквивалентности в смысле А. И. Мальцева [2], но нетрудно проверить, что она в случае *примитивных* классов равносильна эквивалентности, введенной в [5].

венно имеет место

$$x+0=0+x=x. \tag{2}$$

Далее, пусть μ — произвольная m-местная операция класса $\mathfrak{A}$. Рассмотрим $\mathfrak{A}$-свободную алгебру F со свободными образующими $x_1, \ldots, x_m$, $y_1, \ldots, y_m$. Согласно замечанию, сделанному в начале параграфа, F — коммутативна. Перестановочность основных операций класса $\mathfrak{A}$ распространяется и на все (главные производные) операции, в чем можно убеиться путем индукции по степени полинома, определяющего операцию, над системой основных операций. Таким образом, операции $+$ и μ — перестановочны в F. В частности, выполняется равенство

$$(x_1+y_1)\ldots(x_m+y_m)\mu = x_1\ldots x_m\mu + y_1\ldots y_m\mu, \tag{3}$$

являющееся одновременно и тождеством в $\mathfrak{A}$. Из тождеств (2), (3) и из наличия свойства N, как в [5], следует, что $\mathfrak{A}$ эквивалентен классу $\mathfrak{R}$ всех унитарных правых модулей над некоторым (вполне определенным) кольцом с единицей R. Покажем коммутативность кольца R. Если $\bar{\varrho}, \bar{\sigma} \in R$, то пусть ϱ, σ — соответствующие им одноместные операции класса $\mathfrak{A}$. Из коммутативности F вытекает $x_1\varrho\sigma = x_1\sigma\varrho$. Тогда по лемме 1 из [5] $x\bar{\varrho}\bar{\sigma} = x\bar{\sigma}\bar{\varrho}$ является тождеством в $\mathfrak{R}$, так что в самом кольце R будем иметь $1\bar{\varrho}\bar{\sigma} = 1\bar{\sigma}\bar{\varrho}$ (1 — единица в R), т. е. $\bar{\varrho}\bar{\sigma} = \bar{\sigma}\bar{\varrho}$.

С другой стороны, предположим, что $\mathfrak{A}$ эквивалентен классу $\mathfrak{R}$ всех унитарных правых модулей над некоторым коммутативным кольцом с единицей R. В силу теоремы 2 из [6], $\mathfrak{A}$ обладает свойствами O, N. Берем в $\mathfrak{A}$ произвольную m-местную операцию μ. Тождественно выполняется

$$x_1\ldots x_m\mu = x_1\mu_1 + \ldots + x_m\mu_m, \tag{4}$$

где $+$ означает операцию, соответствующую сложению класса $\mathfrak{A}$, а μ_i ($i=1, \ldots, m$) суть подходящие одноместные операции (см. стр. 54, а также лемму 1 в [5]). Если теперь σ — одноместная операция в $\mathfrak{A}$, то, пользуясь тождествами (4), (3) (последнее выполняется в $\mathfrak{A}$ в силу леммы 1 из [5]) и перестановочностью одноместных операций в $\mathfrak{A}$, что вытекает из коммутативности R, мы получим тождества

$$\begin{aligned}(x_1\ldots x_m\mu)\sigma &= (x_1\mu_1+\ldots+x_m\mu_m)\sigma = x_1\mu_1\sigma+\ldots+x_m\mu_m\sigma = \\ &= x_1\sigma\mu_1+\ldots+x_m\sigma\mu_m = (x_1\sigma)\ldots(x_m\sigma)\mu.\end{aligned}$$

Этим показано, что в алгебрах класса $\mathfrak{A}$ одноместные операции являются эндоморфизмами.

Наконец, пусть ν — n-местная операция, A — произвольная алгебра в $\mathfrak{A}$ и $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ — ее эндоморфизмы. Применением только что доказанного, а также тождества (4), получается для любых $a_1, \ldots, a_m \in A$:

$$\begin{aligned}(a_1\ldots a_m\mu)(\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n\nu) &= (a_1\ldots a_m\mu)\varepsilon_1\ldots(a_1\ldots a_m\mu)\varepsilon_n\nu = \\ = \sum_{j=1}^{n}(a_1\ldots a_m\mu)\varepsilon_j\nu_j &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_i\mu_i\varepsilon_j\nu_j = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_i\varepsilon_j\nu_j\mu_i = \\ &= \sum_{i=1}^{m} a_i(\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n\nu)\mu_i = a_1(\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n\nu)\ldots a_m(\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n\nu)\mu.\end{aligned}$$

Значит, $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n \nu$ является эндоморфизмом в A, а этим наличие свойства E у примитивного класса $\mathfrak{A}$ установлено.

Перейдем к рассмотрению свойства S. Необходимым и достаточным условием для того, чтобы примитивный класс $\mathfrak{A}$ обладал свойством S, является существование для всякой пары операций класса $\mathfrak{A}$ μ, ν, m и n-местных соответственно, m-местных операций $\mu_1, \ldots, \mu_n$ с тождеством

$$(x_{11} \ldots x_{1n}\nu)\ldots(x_{m1}\ldots x_{mn}\nu)\mu = (x_{11}\ldots x_{m1}\mu_1)\ldots(x_{1n}\ldots x_{mn}\mu_n)\nu. \tag{5}$$

Это предложение доказывается таким же путем, как теорема IV из [8].

Отсюда следует, что примитивный класс со свойством E обладает и свойством S, ибо в нем ввиду коммутативности всех алгебр выполняется более сильное тождество

$$(x_{11} \ldots x_{1n}\nu)\ldots(x_{m1}\ldots x_{mn}\nu)\mu = (x_{11}\ldots x_{m1}\mu)\ldots(x_{1n}\ldots x_{mn}\mu)\nu.$$

Теорема 2. *Примитивный класс $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда обладает свойствами* O, N, S, *если $\mathfrak{A}$ эквивалентен классу $\mathfrak{R}$ всех унитарных модулей над некоторым кольцом с единицей R, все левые идеалы которого являются двусторонними.*

Доказательство. Как при доказательстве теоремы 1, получим, что в классе $\mathfrak{A}$ со свойствами O, N, S существует двуместная операция $+$, подчиненная тождеству (2). Если μ — m-местная операция в $\mathfrak{A}$, то на основании (5) в $\mathfrak{A}$ тождественно выполняется

$$(x_1+y_1)\ldots(x_m+y_m)\mu = x_1\ldots x_m\mu_1 + y_1\ldots y_m\mu_2.$$

Подставляя $y_1 = \ldots = y_m = 0$, получим: $x_1\ldots x_m\,\mu_1 = x_1\ldots x_m\mu$; аналогичным же путем следует $y_1\ldots y_m\mu_2 = y_1\ldots y_m\mu$. Это показывает, что в $\mathfrak{A}$ имеет место и тождество (3), так что $\mathfrak{A}$ эквивалентен классу всех унитарных правых модулей над некоторым кольцом с единицей R. Ради простоты, мы отождествим одноместные операции класса $\mathfrak{A}$ с элементами R, ссылаясь при этом на лемму 1 из [5]. Пусть теперь F — $\mathfrak{A}$-свободная алгебра со свободным образующим x. Тогда $F = xR$, и ввиду S, для $\sigma \in R$, $xR\sigma$ является подалгеброй в F, значит, для произвольной $\tau \in R$ имеет место включение $xR\sigma\tau \subseteq xR\sigma$, т. е., для любых $\varrho, \sigma, \tau \in R$ существует такое $\tau' \in R$, что

$$x\varrho\sigma\tau = x\tau'\sigma. \tag{6}$$

Поскольку (6) — тождество в $\mathfrak{A}$, в R имеем: $\varrho\sigma\tau = \tau'\sigma$, а это равносильно тому, что в R всякий главный левый идеал является главным идеалом. В силу этого факта, если P — левый идеал в R, то

$$RPR = \bigcup_{p\in P} RpR = \bigcup_{p \in P} Rp = P,$$

т. е. P — идеал кольца R. Этим необходимость условия теоремы доказана.

Для доказательства достаточности предположим, что примитивный класс $\mathfrak{A}$ эквивалентен описанному в теореме классу модулей $\mathfrak{R}$. Берем в $\mathfrak{A}$ m-местную операцию μ, алгебру A и ее подалгебры $A_1, \ldots, A_m$. Требуется доказать, что $M = A_1\ldots A_m\mu$ — подалгебра в A.

Пусть ν — n-местная операция в $\mathfrak{A}$. Рассмотрим элементы $a_{ij} \in A_i$ $(i=1, \ldots, m;\ j=1, \ldots, n)$. Достаточно показать, что $m=(a_{11} \ldots a_{m1}\mu) \ldots$ $\ldots(a_{1n} \ldots a_{mn}\mu)\nu \in M$. Двукратным применением тождества (4), выполняющегося и в $\mathfrak{A}$, получим:

$$m = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mu_i\nu_j,$$

где суммирование производится операцией, соответствующей в $\mathfrak{A}$ сложению класса $\mathfrak{R}$, а μ_i, ν_j — подходящие одноместные операции. Этим последним в R соответствуют элементы $\bar{\mu}_i, \bar{\nu}_j$. Предположение относительно R влечет за собой существование в R элементов $\bar{\nu}_{ij}$, для которых имеют место равенства $\bar{\mu}_i\bar{\nu}_j = \bar{\nu}_{ij}\bar{\mu}_i$ $(i=1, \ldots, m; j=1, \ldots, n)$. По лемме 1 из [5] тогда и в $\mathfrak{A}$ существуют одноместные операции, при которых справедливы тождества $x\mu_i\nu_j = x\nu_{ij}\mu_i$. Отсюда

$$m = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\nu_{ij}\mu_i,$$

а так как здесь

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\nu_{ij} \in A_i,$$

то в самом деле $m \in M$, что и требовалось доказать.

Теоремы 1 и 2 дают нам возможность определить все минимальные (в другой терминологии: эквационально полные, см. [10]) примитивные классы со свойствами O, N, E, а также со свойствами O, N, S. Ф. Гечег заметил [9], что простые кольца отличаются тем, что классы всех унитарных правых модулей над ними являются минимальными. С другой стороны, Т. Селе указал на возможность охарактеризовать тела, как кольца с нетривиальным умножением и без истинных левых идеалов [12]. При помощи этих замечаний получается следующее предложение:

Минимальный примитивный класс со свойствами O, N, E (O, N, S) эквивалентен классу всех векторных пространств над некоторым полем (телом).

§ 3

Теперь мы будем рассматривать примитивный класс $\mathfrak{A}$ со свойствами O, P. Покажем, что $\mathfrak{A}$ обладает и свойством QR. Пусть A — алгебра из $\mathfrak{A}$, а φ — конгруэнция в A. Тогда $0=00\psi \in N_\varphi$, так что мы должны показать, что N_φ однозначно определяет конгруэнцию φ. В самом деле, если ϑ — отличная от φ конгруэнция в A, то существуют такие элементы $a, b \in A$, что например $a \equiv b(\varphi)$, $a \not\equiv b(\vartheta)$, откуда $ab\psi \in N_\varphi$, $ab\psi \notin N_\vartheta$, так что $N_\varphi \neq N_\vartheta$.

Благодаря только что доказанному, легко получается

Теорема 3. *Примитивный класс $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда обладает свойствами* O, P, H (*или* T), *если $\mathfrak{A}$ эквивалентен классу $\mathfrak{R}$ всех унитарных правых модулей над некоторым кольцом с единицей R.*

Доказательство. Если класс $\mathfrak{A}$ обладает свойствами O, P, H (T), то он является классом со свойствами O, QR, H (T), но тогда в силу теоремы 2 из [6] условие теоремы выполняется. С другой стороны, той же теоремой обеспечено наличие свойств О, Н, Т у всякого примитивного класса, эквивалентного классу $\mathfrak{R}$. Наконец, такие примитивные классы обладают и свойством Р: в качестве операции ψ можно взять операцию, соответствующую модульному вычитанию.

§ 4

Примитивный класс $\mathfrak{A}$ тогда и только обладает свойством О, если в любой алгебре A из $\mathfrak{A}$ среди классов каждой конгруэнции существует единственный класс, являющийся подалгеброй в A. Необходимость этого условия очевидна, а для доказательства достаточности рассмотрим $\mathfrak{A}$-свободную алгебру F со свободными образующими x, y. В алгебре F, а также в ее подалгебрах $\{x\}, \{y\}$ существуют однозначно определенные элементы (классы тривиальной конгруэнции) $xy\sigma, x\tau, y\omega$ соотв., являющиеся подалгебрами. Здесь, понятно, σ, τ и ω означают подходящие операции. По условию

$$x\tau = y\omega (= xy\sigma), \tag{7}$$

а поскольку (7) — тождество в $\mathfrak{A}$, мы получим; $x\tau = x\omega$, т. е. операции τ и ω — тождественны, но тогда, как показывает (7), в $\mathfrak{A}$ имеет место и тождество

$$x\omega = y\omega. \tag{8}$$

Принимая во внимание, что $x\omega$ — подалгебра в F, для произвольной операции ϱ класса $\mathfrak{A}$ получим:

$$(x\omega)\ldots(x\omega)\varrho = x\omega. \tag{9}$$

Тождества (8) и (9) вместе означают, что ω — опорная операция.

Из доказанного и из теоремы 2 в [6] вытекает

Теорема 4. *Если в каждой алгебре примитивного класса $\mathfrak{A}$ можно взаимно однозначно сопоставлять подалгебры и конгруэнции* (т. е. каждая подалгегра является классом единственной конгруэнции, и среди классов каждой конгруэнции найдется единственная подалгебра), *то $\mathfrak{A}$ эквивалентен классу всех унитарных правых модулей над некоторым кольцом с единицей.*

Литература

[1] А. И. Мальцев, К общей теории алгебраических систем, *Матем. Сборник*, **35** (**77**) (1954), 3—20.

[2] А. И. Мальцев, Структурная характеристика некоторых классов алгебр, *Доклады АН СССР*, **120** (1958), 29—32.

[3] Б. И. Плоткин, Ω-полугруппы, Ω-кольца и представления, *Доклады АН СССР*, **149** (1963), 1037—1040.

[4] А. А. Терехов, Об алгебрах с совпадающими прямыми и свободными произведениями, *Ученые зап. Ивановского Гос. Пед. Ин-та*, **18** (1958), 61—66.

[5] B. Csákány (Б. Чакань), Об эквивалентности некоторых классов алгебраических систем, *Acta Sci. Math.*, **23** (1962), 46—57.

[6] ——— Примитивные классы алгебр, эквивалентные классам полумодулей и модулей, *Acta Sci. Math.*, **24** (1963), 157—164.
[7] ——— Об абелевых свойствах примитивных классов универсальных алгебр, *Успехи Матем. Наук*, **17:6** (**108**) (1962), 217.
[8] T. Evans, Properties of algebras almost equivalent to identities, *J. London Math. Soc.*, **37** (1962), 53–59.
[9] F. Gécseg (Ф. Гечег), О примитивных классах полумодулей и модулей, *Acta Sci. Math.*, **24** (1963), 165—172.
[10] J. Kalicki–D. Scott, Equational completeness of abstract algebras, *Indag. Math.*, **17** (1955), 650–659.
[11] J. Slominski, On the determining of the form of congruences in abstract algebras with equationally definable constant element, *Fund. Math.*, **48** (1960), 325–341.
[12] T. Szele, Die Ringe ohne Linksideale, *Buletin Ştiinţific Bucureşti*, **1** (1950), 783–789.

(Поступило 29/VII, 1963 г.)

Logical dependence of certain chain conditions in lattice theory

By SERGIU RUDEANU in Bucharest (Roumania)

Introduction

The purpose of this paper is to determine all logical implications that exist between certain chain conditions occurring in lattice theory.

We recall first some basic notions. A subset C of a partially ordered set P is called a *chain of* P, if C is totally ordered with respect to the ordering of P (if $x, y \in C$, then x, y are *comparable*, that is either $x < y$, or $x = y$, or $x > y$). A chain $C \subseteq P$ is said to be *maximal*, if it has the following property: $a \in L$ comparable with all $c \in C$, implies $a \in C$. A *bounded* chain is a chain C with least and greatest element: there exist $a, b \in C$, such that $a \leqq c \leqq b$ for every $c \in C$. A *finite* chain is a chain having a finite number of elements; all finite chains are bounded. Let us denote by $x \prec y$ the fact that y *covers* x, that is: $x < y$ and there is no element z such that $x < z < y$. Then a *finite maximal* chain C can be written in the form $x_0 \prec x_1 \prec \ldots \prec x_n$; the number n is called the *length* of C. By definition, two maximal chains C, C' *have the same length* if either both C, C' are infinite, or C, C' have the same finite length n. A partially ordered set P is said be *of finite length*, if there is a natural number n, such that every maximal chain C of P has a length $\leqq n$. P is said to be *of locally finite length*, if for every $a, b \in P$, with $a < b$, the segment $[a, b] = \{x | x \in L, a \leqq x \leqq b\}$ is of finite length.

As concerns the existence of maximal chains, we recall here that the following property is equivalent to the axiom of choice: *every chain of a partially ordered set is contained in a maximal chain* (see, for instance, [1]).

Now, let L be a lattice whose operations are denoted by $\cup$, $\cap$. We shall consider the following properties:

M. For every $a, b, c \in L$, $a \leqq c$ implies $a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap c$.

S. For every $a, b, x \in L$ such that $a \cap b < x < a$, there is an element $t \in L$, such that $a \cap b < t \leqq b$ and $(x \cup t) \cap a = x$.

F_1. The lattice L is of finite length.

F_2. The lattice L is of locally finite length.

F_3. All bounded chains of L are finite.

J_1. For every $a, b \in L$ with $a < b$, all maximal chains of $[a, b]$ have the same length.

J_2. For every $a, b \in L$ with $a < b$, all finite maximal chains of $[a, b]$ have the same length.

C_1. For every $a, b \in L$, $a \cap b \prec a$ implies $b \prec a \cup b$.

C_2. For every $a, b \in L$, $a \cap b \prec a, b$*) implies $a, b \prec a \cup b$.

A lattice L satisfying property M, respectively S, is called *modular*, respectively *semi-modular*. According to G. Szász [11], property J_1 is the *Jordan—Dedekind chain condition*; in G. Birkhoff's book [1], this denomination is reserved to property J_2; in R. Croisot's terminology [4], the Jordan—Dedekind chain condition is the logical conjunction of J_1 and F_3 (or, of J_2 and F_3). Properties C_1 and C_2 may be called *covering conditions* [1]; C_1 is also called „die Nachbarbedingung" [11].

The above properties are not independent. For instance, it is easily seen that $F_1 \Rightarrow F_2 \Rightarrow F_3$; $J_1 \Rightarrow J_2$; $C_1 \Rightarrow C_2$ a. s. o.; other less trivial logical implications are given in [1], [4], [11]. In this paper, we shall determine all logical implications between M, ..., C_2.

In general, a system Σ of properties being given, the determination of all possible logical implications between the properties belonging to Σ**), is called the *complete existential theory* of Σ. This notion is due to E. H. Moore [9]. The complete existential theory of a system Σ, offers us a (complete) set of new results and a definitive systematization of them. Studies concerning the complete existential theory of certain axiom systems occurring in the theory of partially ordered sets, were made by A. H. Diamond [2], L. L. Dines [3], R. Croisot [4], E. V. Huntington [5], [6], [7] (paper [7] contains detailed explanations about the significance of this notion), H. M. MacNeille [8], I. Rosenbaum [10], J. S. Taylor [12], [13], and W. E. Van de Walle [14].

In the sequel we shall study the complete existential theory of the system

$$\Sigma = \{M, S, F_1, F_2, F_3, J_1, J_2, C_1, C_2\}. \tag{1}$$

This problem was suggested us by D. Vaida.

§ 1

We shall first establish some lemmas,

Lemma 1. *If* F_3 *and* C_1, *then* F_2 *and* J_1.

Proof. Let L be a lattice satisfying F_3 and C_1; and let $a, b \in L$, with $a < b$. We must prove that all maximal chains of $[a, b]$ have the same finite length. By F_3, $[a, b]$ includes a finite maximal chain; taking into account Theorem 1 from [4], p. 88, we obtain the desired conclusion.

Lemma 2. *If* C_1, *then* J_1.

Proof. Let L be a lattice satisfying C_1, and let $a, b \in L$, with $a < b$. If $[a, b]$ includes a finite maximal chain, then, reasoning as in Lemma 1, we conclude that all maximal chains of $[a, b]$ have the same (finite) length. If $[a, b]$ has no finite maximal chain, then all maximal chains of $[a, b]$ are infinite. In both cases, J_1 is verified.

*) $x \prec y, z$ means $x \prec y$ and $x \prec z$; similarly for $t, u \prec v$.

**) We consider the most general type of implications $A \Rightarrow B$, that is, A and B are logical functions of the properties of Σ (expressed by means of logical conjunction, disjunction, negation).

Lemma 3. *If* F_3 *and* J_1, *then* F_2.

Proof. Let L be a lattice satisfying F_3, but not F_2; we shall prove that L does not satisfy J_1. According to the hypothesis, L includes a segment $[a, b]$ of infinite length, although all maximal chains of $[a, b]$ are finite. This means that for every natural number n, there exists a maximal chain of $[a, b]$, whose length is $>n$; thus J_1 is not verified.

Lemma 4. *If* F_2 *and* C_2, *then* S.

Proof. Let L be a lattice satisfying F_2 and C_2, and let $a, b, x \in L$, such that

(2) $$a \cap b < x < a.$$

By F_2, the segment $[a \cap b, x]$ has a finite length n, and $[a \cap b, b]$ is also of finite length. Hence there is an element $t \in L$, such that

(3) $$a \cap b \prec t \leqq b;$$

we shall prove that

(4) $$x = (x \cup t) \cap a.$$

We remark first that (2) and (3) imply

(5) $$a \cap b = x \cap t$$

and

(6) $$x \leqq (x \cup t) \cap a < x \cup t;$$

($x \cup t = (x \cup t) \cap a$ would imply $t \leqq x \cup t \leqq a$, hence $t \leqq a \cap b$, a contradiction).

Now, relation (4) is an immediate consequence of (6) and

(7) $$x \prec x \cup t;$$

therefore, it is sufficient to prove (7). We shall do this by recurrence on the length n of $[a \cap b, x]$.

If $n=1$, then $a \cap b \prec x$; taking into account (5) and (3), we deduce $x \cap t \prec x, t$. By C_2, we obtain (7).

Now, supposing the assertion true for $n-1$, we shall prove it for $n>1$. In fact, F_2 implies the existence of an element $y \in L$ such that

(8) $$a \cap b < y \prec x,$$

the segment $[a \cap b, y]$ being of length $n-1$. Relation (8) and the inductive hypothesis imply respectively

(9) $$y \leqq x \cap (y \cup t) \leqq y \cup t$$

and

(10) $$y \prec y \cup t.$$

Since $x \cap (y \cup t) \neq y \cup t$ (otherwise $t \leqq y \cup t \leqq x < a$, hence $t \leqq a \cap b$, a contradiction), relations (9) and (10) imply

(11) $$y = x \cap (y \cup t).$$

Relations (11), (8) and (10) show that $x\cap(y\cup t)\prec x, y\cup t$. Hence, by C_2, we obtain

$$x, y\cup t\prec x\cup(y\cup t) = x\cup t,$$

completing the proof.

Lemma 5. *If* C_2, *then* J_2.

Proof. Let L be a lattice satisfying C_2, and let

$$a = x_0\prec x_1\prec\ldots\prec x_n = b, \tag{12}$$

$$a = y_0\prec y_1\prec\ldots\prec y_m = b \tag{13}$$

be two finite maximal chains, having the same end elements; we must prove that $n=m$.

If $n=1$, then $a\prec b$, hence $m=1$. We suppose the assertion true for $n-1$ and we shall prove it for n.

If $x_1=y_1$, the maximal chains $x_1\prec x_2\prec\ldots\prec x_n = b$ and $x_1 = y_1\prec y_2\prec\ldots$ $\ldots\prec y_m = b$ have the same length, according to the inductive hypothesis, that is, $n-1 = m-1$.

If $x_1\neq y_1$, then $x_1\cap y_1 = a\prec x_1, y_1$. By C_2, we have

$$x_1, y_1\prec x_1\cup y_1 = u_1. \tag{14}$$

If there exists a finite maximal chain between a_1 and b, then the equality $n=m$ is immediately deduced, as in [4], Lemma 1, pp. 64—65. But such a chain can be constructed as follows.

We define

$$u_i = \begin{cases} x_i\cup u_{i-1}, & \text{if} \quad x_i\neq u_{i-1} \\ x_{i+1}, & \text{if} \quad x_i=u_{i-1} \end{cases} \qquad (i=2, 3, \ldots, n-1); \tag{15}$$

and we remark that

$$x_i, u_{i-1}\prec u_i \qquad (i=2, \ldots, n-1). \tag{16}$$

Indeed, if $x_2\neq u_1$, then $x_2\cap u_1 = x_1\prec x_2, u_1$ and by C_2, $x_2, u_1\prec x_2\cup u_1 = u_2$. If $x_2=u_1$, then $u_2=x_3 \succ x_2=u_1$. The proof of (16) is easily completed by recurrence.

Now, the maximal chain between u_1 and b will be $u_1\prec u_2\prec\ldots\prec u_{n-1}$; it is sufficient to prove that $u_{n-1}=b_n$.

If $x_{n-1}=u_{n-2}$, then $u_{n-1}=x_n=b$. If $x_{n-1}\neq u_{n-2}$, then $x_{n-1}\leqq x_{n-1}\cup u_{n-2} = u_{n-1}\leqq b$. But $x_{n-1}\prec b$ and $x_{n-1}\neq x_{n-1}\cup u_{n-2}$ (otherwise, $x_{n-2}\prec u_{n-2}\leqq x_{n-1}$ and $x_{n-2}\prec x_{n-1}$ would imply $u_{n-2}=x_{n-1}$, a contradiction), therefore $u_{n-1}=b$, completing the proof.

§ 2

In the sequel, for every $A, B\in\Sigma$ we shall denote by AB and $A\vee B$ the logical conjunction and disjunction, respectively, of A, B and by $\bar{A}$ the negation of A. The complete existential theory of Σ will be made by means of Venn diagrams. This is possible on account on the equivalence between the implication

$$A\Rightarrow B \tag{17}$$

and the relation

(18) $$A\bar{B}=0.$$

The last equality means that, when considering a Venn diagram, the region corresponding to property $A\bar{B}$ (A and not B) is void. On the other hand, a relation of the form

(19) $$AB=0$$

(expressed in terms of Venn diagrams) is equivalent to the implication

(20) $$A\Rightarrow\bar{B},$$

if we take into account that

(21) $$\bar{\bar{A}}=A.$$

Thus, the problem of studying the complete existential theory of Σ, is equivalent to the following:*)

Consider the Venn diagram of the 9 properties belonging to Σ; there are 2^9 possible elementary regions**). Determine which of these regions are void, and which are not.

To solve this problem, we notice first that

(22) $$\mathrm{M}\Rightarrow\mathrm{S},\quad \text{but}\quad \mathrm{S}\not\Rightarrow\mathrm{M},$$

(23) $$\mathrm{F}_1\Rightarrow\mathrm{F}_2\Rightarrow\mathrm{F}_3,\quad \text{but}\quad \mathrm{F}_3\not\Rightarrow\mathrm{F}_2\not\Rightarrow\mathrm{F}_1;\ \mathrm{F}_3\not\Rightarrow\mathrm{F}_1,$$

(24) $$\mathrm{J}_1\Rightarrow\mathrm{J}_2,\quad \text{but}\quad \mathrm{J}_2\not\Rightarrow\mathrm{J}_1,$$

(25) $$\mathrm{C}_1\Rightarrow\mathrm{C}_2,\quad \text{but}\quad \mathrm{C}_2\not\Rightarrow\mathrm{C}_1,$$

(see, for instance, [1], [4], or [11]). This means that the non-void elementary regions of the system $\Sigma'=\{\mathrm{M},\mathrm{S}\}$ are

(26) $$\mathrm{MS}=\mathrm{M},\ \overline{\mathrm{M}}\mathrm{S},\ \overline{\mathrm{M}}\overline{\mathrm{S}}=\overline{\mathrm{S}},$$

and the non-void elementary regions of the system $\Sigma''=\{\mathrm{F}_1,\mathrm{F}_2,\mathrm{F}_3\}$ are

(27) $$\mathrm{F}_1\mathrm{F}_2\mathrm{F}_3=\mathrm{F}_1,\ \overline{\mathrm{F}}_1\mathrm{F}_2\mathrm{F}_3=\overline{\mathrm{F}}_1\mathrm{F}_2,\ \overline{\mathrm{F}}_1\overline{\mathrm{F}}_2\mathrm{F}_3=\overline{\mathrm{F}}_2\mathrm{F}_3,\ \overline{\mathrm{F}}_1\overline{\mathrm{F}}_2\overline{\mathrm{F}}_3=\overline{\mathrm{F}}_3.$$

Now, the elementary regions of the system

(28) $$\Sigma_1=\Sigma'\cup\Sigma''=\{\mathrm{M},\mathrm{S},\mathrm{F}_1,\mathrm{F}_2,\mathrm{F}_3\}$$

are obtained by forming the meet of each region (26) with each region (27).

But $\mathrm{F}_3\mathrm{C}_1\Rightarrow\mathrm{F}_2\mathrm{J}_1\Rightarrow\mathrm{F}_2$, by Lemma 1, and

(29) $$\mathrm{S}\Rightarrow\mathrm{C}_1,$$

(see, for instance, [11], p. 157, Theorem 50), therefore $\mathrm{F}_3\mathrm{S}\Rightarrow\mathrm{F}_2$, hence $\overline{\mathrm{F}}_2\mathrm{F}_3\mathrm{S}=0$.

*) For a detailed proof of this equivalence, see, for instance, [7].

**) An elementary region is a region corresponding to a complete elementary conjunction of $\mathrm{M},\mathrm{S},\ldots,\mathrm{C}_2$, for instance $\mathrm{M}\overline{\mathrm{S}}\overline{\mathrm{F}}_1\mathrm{F}_2\overline{\mathrm{F}}_3\mathrm{J}_1\overline{\mathrm{J}}_2\overline{\mathrm{C}}_1\mathrm{C}_2$.

The other meets of the regions (26) and (27), indicated in Fig. I, are non-void. More precisely, the fact that the

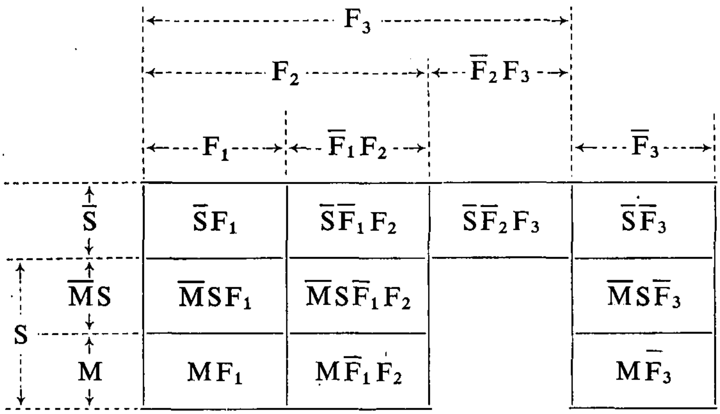

Fig. I

regions MF_1, $M\bar{F}_1F_2$, $M\bar{F}_3$, $\bar{M}S\,F_1$, $\bar{M}S\bar{F}_1F_2$, $\bar{M}S\bar{F}_3$, $\bar{S}\bar{F}_2F_3$ are non-void, is shown respectively by the lattices in Fig. 1, 2, ..., 6, 11 (the lattice in Fig. 2, which appears also as a sublattice in Fig. 3, 5, 6, 9, 10, 13, 14, 16, is a lattice isomorphic to the chain of natural numbers). The fact that the regions $\bar{S}F_1$, $\bar{S}\bar{F}_1F_2$ are non-void, is shown by any of the lattices in Fig. 7, 8, respectively by any of the lattices in Fig. 9, 10. Finally, the fact that the region $\bar{S}\bar{F}_3$ is non-void, is shown by any of the lattices in Fig. 12, ..., 17 (in Fig. 12, 13, 15 the dual of the lattice in Fig. 2 appears as a sublattice). Thus we have proved

Lemma 6. *The complete existential theory of system Σ_1 is shown in Fig. I* (the only non-void elementary regions are shown in Fig. I).

Now, we shall study the complete existential theory of the system

(30) $$\Sigma_2 = \Sigma_1 \cup \{J_1, J_2\} = \{M, S, F_1, F_2, F_3, J_1, J_2\}.$$

It follows from (24) that the non-void elementary regions of the system $\{J_1, J_2\}$ are

(31) $$J_1J_2 = J_1,\ \bar{J}_1J_2,\ \bar{J}_1\bar{J}_2 = \bar{J}_2,$$

hence the elementary regions of Σ_2 are obtained by forming the meet of each region shown in Fig. I, with each region (31). We shall prove that some of these meets are void.

First, we have $S \Rightarrow J_1$ by Lemma 2 and (29); hence all Σ_2 elementary regions included in S satisfy J_1.

Further, it is evident that $F_3J_2 \Rightarrow J_1$, hence $F_3\bar{J}_1J_2 = 0$ and a fortiori

(32) $$\bar{S}\bar{F}_2F_3\bar{J}_1J_2 = 0;$$

by Lemma 3 we have also $\bar{F}_2F_3J_1=0$, hence a fortiori

(33) $$\bar{S}\bar{F}_2F_3J_1=0.$$

Finally, $F_2J_2 \Rightarrow F_3J_2 \Rightarrow J_1$, hence all Σ_2 elementary regions included in F_2, that is in F_1 or in $\bar{F}_1F_2$, satisfy J_1.

The elementary regions of Σ_2, indicated in Fig. II, are non-void. To prove

<table>
<tr><td rowspan="3">$\bar{S}F_1\bar{J}_2$</td><td rowspan="3">$\bar{S}\bar{F}_1F_2\bar{J}_2$</td><td rowspan="6">$\bar{S}\bar{F}_2F_3\bar{J}_2$</td><td rowspan="2">$\bar{S}\bar{F}_3J_2$</td></tr>
<tr></tr>
<tr><td rowspan="2">$\bar{S}\bar{F}_3\bar{J}_1J_2$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$\bar{S}F_1J_1$</td><td rowspan="3">$\bar{S}\bar{F}_1F_2J_1$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\bar{S}\bar{F}_3J_1$</td></tr>
<tr></tr>
<tr><td>$\bar{M}SF_1J_1$</td><td>$\bar{M}S\bar{F}_1F_2J_1$</td><td></td><td>$\bar{M}S\bar{F}_3J_1$</td></tr>
<tr><td>MF_1J_1</td><td>$M\bar{F}_1F_2J_1$</td><td></td><td>$M\bar{F}_3J_1$</td></tr>
</table>

Fig. II

this assertion, we compare Fig. II to Fig. I and we remark it is sufficient to prove that the regions $\bar{S}F_1J_1$, $\bar{S}F_1\bar{J}_2$, $\bar{S}\bar{F}_1F_2J_1$, $\bar{S}\bar{F}_1F_2\bar{J}_2$, $\bar{S}\bar{F}_3J_1$, $\bar{S}\bar{F}_3\bar{J}_1J_2$, $\bar{S}\bar{F}_3\bar{J}_2$ are non-void. But the fact that the first four regions are non-void, is shown by the lattices in Fig. 7, 8, 9, 10. The fact that the regions $\bar{S}\bar{F}_3J_1$ and $\bar{S}\bar{F}_3\bar{J}_1J_2$ are non-void, is shown by any of the lattices in Fig. 12, 13, 14, respectively by any of the lattices in Fig. 15, 16. Finally the fact that the region $\bar{S}\bar{F}_3\bar{J}_2$ is non-void, is shown by the lattice in Fig. 17. We have thus examined all elementary regions of Σ_2, proving the following

Lemma 7. *The complete existential theory of system Σ_2 is shown in Fig. II.*

Now, we are in the position to study the complete existential theory of the system

(34) $$\Sigma=\Sigma_2\cup\{C_1, C_2\}=\{M, S, F_1, F_2, F_3, J_1, J_2, C_1, C_2\}.$$

It follows from (25) that the non-void elementary regions of the system $\{C_1, C_2\}$ are

(35) $$C_1C_2 = C_1,\ \bar{C}_1C_2,\ \bar{C}_1\bar{C}_2 = \bar{C}_2,$$

hence the elementary regions of Σ are obtained by forming the meet of each region shown in Fig. II, with each region (35). We shall prove that some of these meets are void.

First, relation (29) shows that every Σ elementary region, included in S, satisfies C_1.

Further, by Lemma 4, $\bar{S}F_2C_2=0$, hence every Σ elementary region, included in $\bar{S}F_2$, that is in $\bar{S}F_1$ or in $\bar{S}\bar{F}_1F_2$, satisfies $\bar{C}_2$.

But $\bar{J}_2 C_1 \vee \bar{J}_2 \bar{C}_1 C_2 = \bar{J}_2(C_1 \vee \bar{C}_1 C_2) = \bar{J}_2 C_2 = 0$, by (35) and Lemma 5, hence a fortiori

$$\bar{S}\bar{F}_2 F_3 \bar{J}_2 C_1 = \bar{S}\bar{F}_2 F_3 \bar{J}_2 \bar{C}_1 C_2 = \bar{S}\bar{F}_3 \bar{J}_2 C_1 = \bar{S}\bar{F}_3 \bar{J}_2 \bar{C}_1 C_2 = 0. \tag{36}$$

Finally, $\bar{J}_1 C_1 = 0$, by Lemma 2, hence

$$\bar{S}\bar{F}_3 J_1 J_2 C_1 = 0. \tag{37}$$

The elementary regions of Σ, shown in Fig. III, are non-void. To prove this assertion, we compare Fig. III and Fig. II, and we remark that it is sufficient to prove

<table>
<tr><td rowspan="2">$\bar{S}F_1\bar{J}_2\bar{C}_2$</td><td rowspan="2">$\bar{S}\bar{F}_1F_2\bar{J}_2\bar{C}_2$</td><td rowspan="3">$\bar{S}\bar{F}_2F_3\bar{J}_2\bar{C}_2$</td><td colspan="6">$\bar{S}\bar{F}_3\bar{J}_2\bar{C}_2$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$\bar{S}\bar{F}_3\bar{J}_1J_2\bar{C}_1C_2$</td><td colspan="3">$\bar{S}\bar{F}_3\bar{J}_1J_2\bar{C}_2$</td></tr>
<tr><td>$\bar{S}F_1J_1\bar{C}_2$</td><td>$\bar{S}\bar{F}_1F_2J_1\bar{C}_2$</td><td colspan="2">$\bar{S}\bar{F}_3J_1C_1$</td><td colspan="2">$\bar{S}\bar{F}_3J_1\bar{C}_1C_2$</td><td colspan="2">$S\bar{F}_3J_1\bar{C}_2$</td></tr>
<tr><td>$\bar{M}SF_1J_1C_1$</td><td>$\bar{M}S\bar{F}_1F_2J_1C_1$</td><td rowspan="2"></td><td colspan="6">$\bar{M}S\bar{F}_3J_1C_1$</td></tr>
<tr><td>$MF_1J_1C_1$</td><td>$M\bar{F}_1F_2J_1C_1$</td><td colspan="6">$M\bar{F}_3J_1C_1$</td></tr>
</table>

Fig. III

that the regions $\bar{S}\bar{F}_3J_1C_1$, $\bar{S}\bar{F}_3J_1\bar{C}_1C_2$, $\bar{S}\bar{F}_3J_1\bar{C}_2$, $\bar{S}\bar{F}_3\bar{J}_1J_2\bar{C}_1C_2$, $\bar{S}\bar{F}_3\bar{J}_1J_2\bar{C}_2$ are non-void. But this is shown by the lattices in Fig. 12, ..., 16, respectively. We have thus examined all elementary regions of Σ, proving the following

Theorem. *The complete existential theory of system Σ is shown in Fig. III.*

In other words, *the non-void elementary regions of Σ are those shown in Fig. III.* The fact that the regions indicated in Fig. III are elementary, is a consequence of the following relations: $M\bar{S}=0$, $F_1\bar{F}_2F_3 = F_1\bar{F}_2\bar{F}_3 = F_1F_2\bar{F}_3 = \bar{F}_1F_2F_3 = 0$, $J_1\bar{J}_2 = 0$, $C_1\bar{C}_2 = 0$ (equivalent to (22), (23), (24), (25) respectively) and (26), (27), (31), (35).

As an application of the above theorem, let us decide whether the relation $\bar{S}\bar{F}_2\bar{J}_2C_1 = 0$ (that is $C_1 \Rightarrow S \vee F_2 \vee J_2$, or $\bar{S}\bar{J}_2 \Rightarrow F_2 \vee \bar{C}_1$, a. s. o.) is true or not. But $\bar{S}\bar{F}_2\bar{J}_2C_1 = \bar{S}(\bar{F}_2F_3 \vee \bar{F}_3)\bar{J}_2C_1 = \bar{S}\bar{F}_2F_3\bar{J}_2C_1 \vee \bar{S}\bar{F}_3\bar{J}_2C_1 = 0$ thus the above implication is true.

Conclusions. The present study could be continued, by adding other axioms to Σ, for instance the converses of C_1 and C_2, or some conditions involving the notion of a *dimension function* (see [11]).

Note added in proof. A simple inspection of Fig. III shows that $F_3\bar{C}_1C_2 = 0$ (or $F_3C_2 \Rightarrow C_1$). This assertion is equivalent to the dual of Theorem 3.3 in Kořínek's paper „Lattices in which the theorem of Jordan – Hölder is generally true", *Třídy České Acad.* **59**, No. 23 (1949).

Fig. 1

Fig. 2

Fig. 3

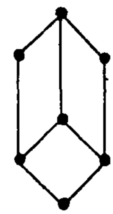

Fig. 4

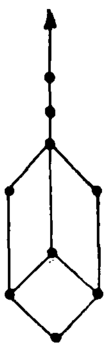

Fig. 5

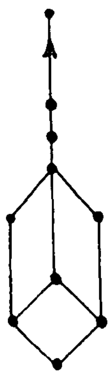

Fig. 6

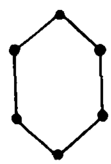

Fig. 7

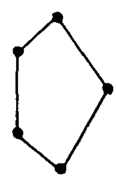

Fig. 8

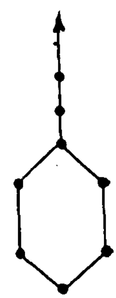

Fig. 9

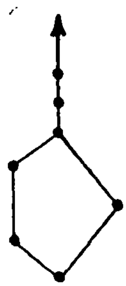

Fig. 10

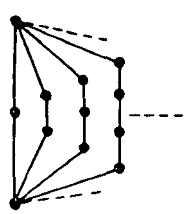

Fig. 11

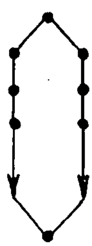

Fig. 12

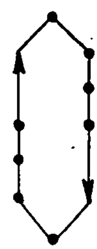

Fig. 13

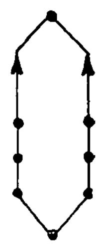

Fig. 14

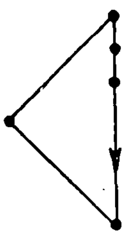

Fig. 15

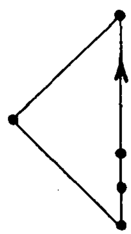

Fig. 16

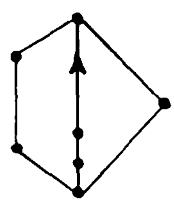

Fig. 17

References

[1] G. Birkhoff, *Lattice Theory* (New York, 1948).
[2] A. H. Diamond, The complete existential theory of the Whitehead—Huntington set of postulates for the algebra of logic, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **35**, (1933) 940—948; correct. *ibid.*, (1934), 893.
[3] L. L. Dines, Complete existential theory of Sheffer's postulates for Boolean algebras, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **21** (1914/15), 183—188.
[4] M. L. Dubreil—Jacotin, L. Lesieur, R. Croisot, Leçons sur la théorie des treillis, des structures algébriques ordonnées et des treillis géométriques (Paris, 1953).
[5] E. V. Huntington, Complete existential theory of the postulates for serial order, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **23** (1917), 276—280.
[6] E. V. Huntington, Sets of completely independent postulates for cyclic order, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **10** (1924), 74—78.
[7] E. V. Huntington, A new set of postulates for betweenness, with a proof of complete independence, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **26** (1924), 257—282.
[8] H. M. MacNeille, Partially ordered sets, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **42** (1937), 416—460.
[9] E. H. Moore, *Introduction to a form of general analysis.* New Haven Colloquium, 1906. (New Haven, 1910).
[10] I. Rosenbaum, A new system of completely independent postulates for betweenness, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **57** (1951), 279.
[11] G. Szász, *Einführung in die Verbandstheorie* (Budapest, 1962).
[12] J. S. Taylor, Complete existential theory of Bernstein's set of four postulates for Boolean algebras, *Ann. Math.*, **19** (1917), 64—69.
[13] J. S. Taylor, Sheffer's set of five independent postulates for Boolean algebras in terms of the operation „rejection" made completely independent, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **26** (1920), 449—454.
[14] W. E. van de Walle, On the complete independence of the postulates for betweenness. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **26** (1924), 249—256.

(Received May 20, 1963)

Über die Konvergenz der Orthogonalreihen. II

Von KÁROLY TANDORI in Szeged

Einleitung

M bezeichnet die Klasse derjenigen Folgen $\{a_n\}_1^\infty$, für die die Orthogonalreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \tag{1}$$

für jedes in $[0, 1]$ orthonormierte System $\{\varphi_n(x)\}$ fast überall konvergiert. (Die Menge der Punkte, wo die Reihe (1) divergiert, kann von dem System $\{\varphi_n(x)\}$ abhängen.) CM bezeichnet die Klasse der Folgen $\{a_n\} \notin M$. Das Hauptresultat dieser Arbeit lautet, wie folgt:

Satz I. *$\{a_n\} \in M$ gilt dann und nur dann, wenn*

$$\|\{a_n\}\|_2 = \lim_{N\to\infty} I_2^{1/2}(a_1, \ldots, a_N) < \infty$$

gilt, mit

$$I_2(a_1, \ldots, a_N) = \sup \int_0^1 \Big(\max_{1 \le i \le j \le N} |a_i\varphi_i(x) + \ldots + a_j\varphi_j(x)|\Big)^2 dx,$$

wobei das Supremum über alle im Intervall $[0, 1]$ orthonormierten Funktionensysteme $\{\varphi_n(x)\}$ gebildet wird. M ist mit der Norm $\|\{a_n\}\|_2$ ein Banachscher Raum.

In § 1 werden wir einige Hilfssätze beweisen, den Beweis von Satz I werden wir in § 2 vollziehen. In § 3 zeigen wir einige Eigenschaften der Norm $\|\{a_n\}\|_2$ und beschäftigen wir uns mit einigen Eigenschaften der Klassen M und CM; in § 4 werden wir Abschätzungen und Anwendungen für $\|\{a_n\}\|_2$ angeben; endlich in § 5 werden andere Normen in M betrachtet.

§ 1. Hilfssätze

Hilfssatz I. *Es gilt*

$$c_1^2 + \ldots + c_N^2 \le I_2(c_1, \ldots, c_N) \le (|c_1| + \ldots + |c_N|)^2. \tag{2}$$

(2) folgt aus der Ungleichung

$$|c_1\varphi_1(x) + \ldots + c_N\varphi_N(x)| \le \max_{1\le i\le j\le N} |c_i\varphi_i(x) + \ldots + c_j\varphi_j(x)| \le$$
$$\le |c_1\varphi_1(x)| + \ldots + |c_N\varphi_N(x)|.$$

Zur Analogie von I_2 definieren wir allgemeiner

$$I_p(c_1, \dots, c_N) = \sup \int_0^1 \big(\max_{1 \leq i \leq j \leq N} |c_i\varphi_i(x) + \dots + c_j\varphi_j(x)|\big)^p \, dx \qquad (1 \leq p \leq 2),$$

wobei das Supremum über alle in [0, 1] orthonormierten Systeme $\{\varphi_n(x)\}$ gebildet wird.

Hilfssatz II. *Es gilt*

$$I_p^{1/p}(c_1+d_1, \dots, c_N+d_N) \leq I_p^{1/p}(c_1, \dots, c_N) + I_p^{1/p}(d_1, \dots, d_N) \qquad (1 \leq p \leq 2). \tag{3}$$

Im Falle $I_p(c_1+d_1, \dots, c_N+d_N)=0$ ist (3) trivialerweise erfüllt. Es sei nun $I_p(c_1+d_1, \dots, c_N+d_N) \neq 0$. Dann gilt

$$I = \int_0^1 \big(\max_{1 \leq i \leq j \leq N} |(c_i+d_i)\varphi_i(x) + \dots + (c_j+d_j)\varphi_j(x)|\big)^p \, dx > 0$$

für ein beliebiges orthonormiertes System $\{\varphi_n(x)\}_1^N$. Aus der Ungleichung

$$\begin{aligned}
&\big(\max_{1 \leq i \leq j \leq N} |(c_i+d_i)\varphi_i(x) + \dots + (c_j+d_j)\varphi_j(x)|\big)^p \leq \\
&\leq \big(\max_{1 \leq i \leq j \leq N} |(c_i+d_i)\varphi_i(x) + \dots + (c_j+d_j)\varphi_j(x)|\big)^{p-1} \cdot \\
&\cdot \big(\max_{1 \leq i \leq j \leq N} |c_i\varphi_i(x) + \dots + c_j\varphi_j(x)| + \max_{1 \leq i \leq j \leq N} |d_i\varphi_i(x) + \dots + d_j\varphi_j(x)|\big)
\end{aligned}$$

ergibt sich, mit Anwendung der Hölderschen Ungleichung,

$$I^{1/p} \leq I_p^{1/p}(c_1, \dots, c_N) + I_p^{1/p}(d_1, \dots, d_N),$$

für jedes orthonormierte System, woraus (3) folgt.

Hilfssatz III. *$I_2(c_1, \dots, c_N)$ ist stetig.*

Auf Grund von (2) und (3) ist die Behauptung offensichtlich.

Hilfssatz IV. *Es gilt*

$$I_2(c_1, \dots, c_N) + I_2(d_1, \dots, d_M) \leq I_2(c_1, \dots, c_N, d_1, \dots, d_M). \tag{4}$$

Es sei $\varepsilon(>0)$ beliebig. Nach der Definition von I_2 gibt es orthonormierte Systeme $\{\varphi_n(x)\}_1^N$ und $\{\psi_n\}_1^M$ mit

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \big(\max_{1 \leq i \leq j \leq N} |c_i\varphi_i(x) + \dots + c_j\varphi_j(x)|\big)^2 \, dx \geq I_2(c_1, \dots, c_N) - \varepsilon, \\
&\int_0^1 \big(\max_{1 \leq i \leq j \leq M} |d_i\psi_i(x) + \dots + d_j\psi_j(x)|\big)^2 \, dx \geq I_2(d_1, \dots, d_M) - \varepsilon.
\end{aligned} \tag{5}$$

Wir setzen $\alpha_i = c_i$ $(i=1, \dots, N)$, $\alpha_{N+j} = d_j$ $(j=1, \dots, M)$ und

$$\chi_i(x) = \begin{cases} \sqrt{2}\varphi_i(2x) & (0 \leq x \leq 1/2), \\ 0 & \text{sonst}, \end{cases} \qquad \chi_{N+j}(x) = \begin{cases} \sqrt{2}\psi_j(2x-1) & (1/2 < x \leq 1), \\ 0 & \text{sonst}. \end{cases}$$

Diese Funktionen bilden ein orthonormiertes System $\{\chi_n\}_1^{N+M}$ in [0, 1]; weiterhin ergibt sich aus (5) durch einfache Rechnung

$$I_2(c_1, \ldots, c_N) + I_2(d_1, \ldots, d_M) - 2\varepsilon \leqq$$

$$\leqq \int_0^1 \big(\max_{1 \leqq i \leqq j \leqq N} |c_i \varphi_i(x) + \ldots + c_j \varphi_j(x)| \big)^2 \, dx +$$

$$+ \int_0^1 \big(\max_{1 \leqq i \leqq j \leqq M} |d_i \psi_i(x) + \ldots + d_j \psi_j(x)| \big)^2 \, dx =$$

$$= 2 \int_0^{1/2} \big(\max_{1 \leqq i \leqq j \leqq N} |c_i \varphi_i(2x) + \ldots + c_j \varphi_j(2x)| \big)^2 \, dx +$$

$$+ 2 \int_{1/2}^1 \big(\max_{1 \leqq i \leqq j \leqq M} |d_i \psi_i(2x-1) + \ldots + d_j \psi_j(2x-1)| \big)^2 \, dx =$$

$$= \int_0^1 \big(\max_{1 \leqq i \leqq j \leqq N+M} |\alpha_i \chi_i(x) + \ldots + \alpha_j \chi_j(x)| \big)^2 \, dx \leqq I_2(c_1, \ldots, c_N, d_1, \ldots, d_M).$$

Da $\varepsilon(>0)$ beliebig ist, ergibt sich daraus (4).

Hilfssatz V. *Es gilt*

$$I_2(c_1, \ldots, c_N) \leqq I_2(d_1, \ldots, d_N), \quad \textit{wenn } |c_i| \leqq |d_i| \qquad (i=1, \ldots, N). \tag{6}$$

Da $I_2(d_1, \ldots, d_N)$ offensichtlich nur von den von 0 verschiedenen Koeffizienten d_n abhängt, kann $d_n \neq 0$ vorausgesetzt werden. Es sei $\varepsilon(>0)$ beliebig angegeben. Dann gibt es ein in [0, 1] orthonormiertes System $\{\varphi_n(x)\}_1^N$ mit

$$\int_0^1 \big(\max_{1 \leqq i \leqq j \leqq N} |c_i \varphi_i(x) + \ldots + c_j \varphi_j(x)|^2 \, dx \geqq I_2(c_1, \ldots, c_N) - \varepsilon.$$

Es sei gesetzt:

$$\bar{\varphi}_i(x) = \begin{cases} \sqrt{2}\, c_i d_i^{-1} \varphi_i(2x) & (0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}), \\ \sqrt{2}(1 - c_i^2 d_i^{-2})^{1/2} \varphi_i(2x-1) & (\frac{1}{2} < x \leqq 1), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$(i=1, \ldots, N)$. Offensichtlich bilden diese Funktionen ein orthonormiertes System in [0, 1]. Nach der Definition von $\bar{\varphi}_i(x)$ erhalten wir durch einfache Rechnung

$$I_2(d_1, \ldots, d_N) \geqq \int_0^1 \big(\max_{1 \leqq i \leqq j \leqq N} |d_i \bar{\varphi}_i(x) + \ldots + d_j \bar{\varphi}_j(x)| \big)^2 \, dx =$$

$$= 2 \int_0^{1/2} \big(\max_{1 \leqq i \leqq j \leqq N} |c_i \varphi_i(2x) + \ldots + c_j \varphi_j(2x)| \big)^2 \, dx +$$

$$+ 2 \int_{1/2}^1 \big(\max_{1 \leqq i \leqq j \leqq N} |d_i (1 - c_i^2 d_i^{-2})^{1/2} \varphi_i(2x-1) + \ldots + d_j (1 - c_j^2 d_j^{-2})^{1/2} \varphi_j(2x-1)| \big)^2 \, dx \geqq$$

$$\geqq \int_0^1 \big(\max_{1 \leqq i \leqq j \leqq N} |c_i \varphi_i(x) + \ldots + c_j \varphi_j(x)| \big)^2 \, dx \geqq I_2(c_1, \ldots, c_N) - \varepsilon.$$

Da $\varepsilon(>0)$ beliebig ist, ergibt sich (6).

Hilfssatz VI. *Es sei* $p(\geqq 2)$ *eine natürliche Zahl und seien* c, α *reelle Zahlen mit* $0 \leqq \alpha < \alpha + c \leqq 1$. *Dann gibt es ein im Intervall* $[0, 1]$ *orthonormiertes System* $\{\varphi_n(p, c, \alpha; x)\}_1^p$ *mit den folgenden Eigenschaften: für* $x \notin [\alpha, \alpha + c]$ *gilt* $\varphi_n(p, c, \alpha; x) = 0$ $(n = 1, \ldots, 2p)$ *und besteht*

$$\int_0^1 \Big(\max_{1 \leqq i \leqq j \leqq 2p} |c_i \varphi_i(p, c, \alpha; x) + \ldots + c_j \varphi_j(p, c, \alpha; x)|\Big)^2 dx \geqq a \min_{1 \leqq i \leqq 2p} c_i p \log^2 p$$

ür jede positive Folge $\{c_n\}_1^{2p}$ *mit einer positiven absoluten Konstante* a.

Im Falle $\alpha = 0, c = 1$ ist dieser Hilfssatz eine unmittelbare Umformung eines Resultats von D. E. Menchoff[1]). Im allgemeinen werden die geforderten Bedingungen des Hilfssatzes VI für die Funktionen $\varphi_n(p, c, \alpha; x) = \sqrt{c}\, \varphi_n(p, 1, 0; cx + \alpha)$ $(n = 1, \ldots, 2p)$ erfüllt.

Hilfssatz VII.[2]) *Für jede Folge* $c_1, \ldots, c_N$ *gibt es ein in* $[0, 1]$ *orthonormiertes System* $\{\psi_n(x)\}_1^N$ *derart, daß*

$$\max_{1 \leqq i \leqq j \leqq N} |c_i \psi_i(x) + \ldots + c_j \psi_j(x)| \geqq 1$$

in einer Menge E *mit* $\operatorname{mes}(E) \geqq \varrho \min(1, I_2(c_1, \ldots, c_N))$ *gibt, wobei* $\varrho(\leqq 1)$ *eine positive, absolute Konstante ist.*

Hilfssatz VIII. *Es gilt*

$$\varrho I_2^{1/2}(c_1, \ldots, c_N) \leqq I_p^{1/p}(c_1, \ldots, c_N) \leqq I_2^{1/2}(c_1, \ldots, c_N) \qquad (1 \leqq p \leqq 2), \tag{7}$$

wobei ϱ *eine positive, absolute Konstante ist.*

Die zweite der Ungleichung (7) folgt aus der Hölderschen Ungleichung. Zum Beweis der ersten Ungleichung kann man $I_2(c_1, \ldots, c_N) = 1$ annehmen. Mit Anwendung des Hilfssatzes VII ergibt sich ein orthonormiertes System $\{\psi_n(x)\}_1^N$, für welches

$$\max_{1 \leqq i \leqq j \leqq N} |c_i \psi_i(x) + \ldots + c_j \psi_j(x)| \geqq 1$$

in einer Menge E mit $\operatorname{mes}(E) \geqq \varrho$. Dann ist

$$\left\{\int_0^1 \Big(\max_{1 \leqq i \leqq j \leqq N} |c_i \psi_i(x) + \ldots + c_j \psi_j(x)|\Big)^p dx\right\}^{1/p} \geqq \varrho^{1/p} \geqq \varrho,$$

woraus die erste Ungleichung (7) folgt.

[1]) D. E. Menchoff, Sur les séries de fonctions orthogonales (Première partie), *Fundamenta Math.*, 4 (1923), 82—105. Siehe noch: S. Kaczmarz, Notes on orthogonal series. II, *Studia Math.*, 5 (1934), 103—104.

[2]) Siehe: K. Tandori, Über die Konvergenz der Orthogonalreihen, *Acta Sci. Math.*, **24** (1963), 139—151.

§ 2. Beweis des Satzes I

In einer vorigen Arbeit[3]) wurde u. a. die folgende Behauptung bewiesen:

A) *Es sei* $\{a_n\}$ *eine gegebene Folge von reellen Zahlen. Gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} I_2(a_{n_k+1}, \dots, a_{n_{k+1}}) < \infty \tag{8}$$

für jede Indexfolge $(0=)n_0 < \dots < n_k < \dots$, *so konvergiert die Reihe* (1) *für jedes orthonormierte System* $\{\varphi_n(x)\}$ *fast überall. Gilt aber* (8) *für eine Indexfolge* $\{n_k\}$ *nicht, so gibt es ein orthonormiertes System* $\{\varphi_n(x)\}$, *für welches die Reihe* (1) *sogar fast überall divergiert.*

In der Menge M definieren wir die vektoriellen Operationen auf die übliche Weise: $\alpha\{a_n\} = \{\alpha a_n\}$, $\{a_n\}+\{b_n\} = \{a_n+b_n\}$. M ist offensichtlich ein linearer Raum.

Es sei

$$\|\{a_n\}\|_2 = \lim_{N\to\infty} I_2^{1/2}(a_1, \dots, a_N) < \infty. \tag{9}$$

(Der Limes existiert, da wegen der Definition von I_2 $I_2(a_1, \dots, a_N) \leqq I_2(a_1, \dots, a_{N+1})$ $(N=1, 2, \dots)$ ist.) Dann gilt (8) wegen (4) für jede Indexfolge $\{n_k\}$ und auf Grund der Behauptung A) ist $\{a_n\} \in M$.

Wir nehmen an, daß (9) nicht erfüllt ist. Aus (3) folgt $I_2^{\frac{1}{2}}(a_1, \dots, a_{n+N}) - - I_2^{\frac{1}{2}}(a_1, \dots, a_n) \leqq I_2^{\frac{1}{2}}(a_{n+1}, \dots, a_{n+N})$ und so gilt $\lim\limits_{N\to\infty} I_2(a_{n+1}, \dots, a_{n+N}) = \infty$. Auf Grund dieser Relation kann eine Indexfolge $(0=)n_0 < \dots < n_k < \dots$ definiert werden derart, daß $I_2(a_{n_k+1}, \dots, a_{n_{k+1}}) \geqq 1$ für jedes k besteht. Für diese Indexfolge wird (8) nicht erfüllt, woraus, auf Grund der Behauptung A) $\{a_n\} \notin M$ sich ergibt.

$\|\{a_n\}\|_2$ ist eine Norm in M: a) $\|\{a_n\}\|_2 = 0$ dann und nur dann, wenn $a_n = 0$ $(n=1, 2, \dots)$ ist; b) $\|\alpha\{a_n\}\|_2 = |\alpha|\,\|\{a_n\}\|_2$ für jede reelle Zahl α; c) $\|\{a_n\}+\{b_n\}\|_2 \leqq \leqq \|\{a_n\}\|_2 + \|\{b_n\}\|_2$. a) folgt aus (2), b) ist offensichtlich und c) folgt aus (3).

Zum Beweis des Satzes I soll nun die Vollständigkeit von der Norm $\|\{a_n\}\|_2$ bewiesen werden. Es sei $\{a_n(m)\} \in M$ $(m=1, 2, \dots)$ mit $\|\{a_n(m')\} - \{a_n(m'')\}\|_2 \to 0$ $(m', m'' \to \infty)$. Nach (2) ergibt sich $a_n(m) \to a_n$ $(m \to \infty; n=1, 2, \dots)$. Es sei $\varepsilon(>0)$ beliebig. Nach der Definition der Norm gilt $I_2(a_1(m') - a_1(m''), \dots, a_N(m') - a_N(m'')) < < \varepsilon^2$ $(m', m'' > \nu(\varepsilon))$ für jedes N. Da I_2 stetig ist, erhalten wir daraus für $m' \to \infty$, daß $I_2(a_1 - a_1(m''), \dots, a_N - a_N(m'')) \leqq \varepsilon^2$ $(m'' > \nu(\varepsilon))$ für jedes N besteht. Woraus $\|\{a_n\} - \{a_n(m'')\}\|_2 \leqq \varepsilon$ $(m'' > \nu(\varepsilon))$ sich ergibt. Auf Grund von c) erhalten wir $\{a_n\} \in M$ und gilt $\|\{a_n\} - \{a_n(m)\}\|_2 \to 0$ $(m \to \infty)$.

Damit haben wir Satz I bewiesen.

Es sei $(0=)m_0 < \dots < m_k < \dots$ eine gegebene Indexfolge und

$$A_{k+1} = \{a_{m_k+1}^2 + \dots + a_{m_{k+1}}^2\}^{1/2} \qquad (k=0, 1, \dots).$$

Wir haben auch die folgende Behauptung bewiesen[4]):

---

[3]) Loc. cit.[2]).

[4]) Siehe loc. cit. [2]).

B) *Gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} I_2(A_{n_k+1}, \ldots, A_{n_{k+1}}) < \infty \tag{10}$$

für jede Indexfolge $(0=)n_0 < \ldots < n_k < \ldots$, *so konvergiert die Folge der* m_k*-ten Partialsummen der Reihe* (1) *für jedes orthonormierte System* $\{\varphi_n(x)\}$ *fast überall. Gilt aber* (10) *für eine Indexfolge* $\{n_k\}$ *nicht, so gibt es ein orthonormiertes System* $\{\varphi_n(x)\}$, *für welches die Folge der* m_k*-ten Partialsummen der Reihe* (1) *sogar fast überall divergiert.*

M^* bezeichnet die Klasse der Folgen $\{a_n\}_1^\infty$, für die die Folge der m_k-ten Partialsummen der Reihe (1) für jedes orthonormierte System $\{\varphi_n(x)\}$ fast überall konvergiert. (Die Menge der Divergenzpunkte kann von dem System $\{\varphi_n(x)\}$ abhängen.) Auf Grund der Behauptung B), mit derselben Methode ergibt sich:

Satz II. $\{a_n\} \in M^*$ *gilt dann und nur dann, wenn*

$$\|\{a_n\}\|_2^* = \lim_{N\to\infty} I_2^{1/2}(A_1, \ldots, A_N) < \infty$$

besteht. M^* *ist mit dieser Norm ein Banachscher Raum.*

§ 3. Über die Norm $\|\{a_n\}\|_2$

Aus (2) folgt

$$\left\{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\right\}^{1/2} \leqq \|\{a_n\}\|_2 \leqq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

Daraus folgt $M \subseteqq l^2$ (l^2 bezeichnet die Klasse der Folgen mit $\Sigma a_n^2 < \infty$). Aus (6) folgt

Satz III. *Es sei* $|a_n| \leqq |b_n|$ $(n=1, 2, \ldots)$. *Ist* $\{b_n\} \in M$, *so gelten* $\{a_n\} \in M$ *und* $\|\{a_n\}\|_2 \leqq \|\{b_n\}\|_2$. *Ist* $\{a_n\} \in CM$, *so gilt* $\{b_n\} \in CM$.

Satz IV. *Es seien* $\{a_n(m)\}_1^\infty$ $(m=1, 2, \ldots)$ *Zahlenfolgen mit* $a_n(m) \searrow 0$ $(m \to \infty;$ $n=1, 2, \ldots)$. *Ist* $\{a_n(1)\} \in M$, *dann gilt* $\|\{a_n(m)\}\|_2 \to 0$ $(m \to \infty)$.

Beweis des Satzes IV. Es sei $\varepsilon(>0)$ beliebig angegeben. Es sei weiterhin $\{\varphi_n(x)\}$ ein beliebiges in $[0, 1]$ orthonormiertes System. Die n-te Partialsumme der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(m)\varphi_n(x)$$

bezeichnen wir mit $s_n^{(m)}(x)$. Auf Grund der Voraussetzungen ist $\{a_n(m)\} \in l^2$. Nach dem Satz von Riesz—Fischer gibt es eine quadratisch integrierbare Funktion $f_m(x)$, nach der die Folge $\{s_n^{(m)}(x)\}$ $(n=1, 2, \ldots)$ im quadratischen Mittel konvergiert. Es sei endlich die Indexfolge $(0=)n_0 < \ldots < n_k < \ldots$ so gewählt, daß

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=n_k+1}^{\infty} a_n^2(1) < \infty.$$

Dann ist

$$\max_{1\leq i\leq j\leq N}|s_j^{(m)}(x)-s_{i-1}^{(m)}(x)|\leqq 2\max_{1\leq i\leq N}|s_i^{(m)}(x)|\leqq$$

$$\leqq 2\left(|f_m(x)|+\left\{\sum_{k=0}^{\infty}(f_m(x)-s_{n_k}^{(m)}(x))^2\right\}^{1/2}+\left\{\sum_{k=0}^{\infty}(\max_{n_k<i\leq j\leq n_{k+1}}|s_j^{(m)}(x)-s_{i-1}^{(m)}(x)|)^2\right\}^{1/2}\right),$$

woraus

$$\int_0^1(\max_{1\leq i\leq j\leq N}|s_j^{(m)}(x)-s_{i-1}^{(m)}(x)|)^2\,dx\leqq \tag{11}$$

$$\leqq 12\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2(m)+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=n_k+1}^{\infty}a_n^2(m)+\sum_{k=0}^{\infty}I_2\big(a_{n_k+1}(m),\ldots,a_{n_{k+1}}(m)\big)\right)$$

sich für jedes m und N ergibt. Es sei nun k_0 und s so groß, daß

$$\sum_{n=k_0+1}^{\infty}a_n^2(1)<\varepsilon^2,\quad \sum_{k=k_0+1}^{\infty}\sum_{n=n_k+1}^{\infty}a_n^2(1)<\varepsilon^2,$$

$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty}I_2\big(a_{n_k+1}(1),\ldots,a_{n_{k+1}}(1)\big)<\varepsilon^2,\quad \sum_{k=0}^{k_0}\sum_{n=s+1}^{\infty}a_n^2(1)<\varepsilon^2$$

erfüllt sind. Wegen $a_n(m)\searrow 0$ $(m\to\infty;\ n=1,2,\ldots)$ aus (11) erhalten wir

$$\int_0^1(\max_{1\leq i\leq j\leq N}|s_j^{(m)}(x)-s_{i-1}^{(m)}(x)|)^2\,dx\leqq$$

$$\leqq 12\left(\sum_{n=1}^{k_0}a_n^2(m)+\sum_{k=0}^{k_0}\sum_{n=n_k+1}^{s}a_n^2(m)+\sum_{k=0}^{k_0}I_2\big(a_{n_k+1}(m),\ldots,a_{n_{k+1}}(m)\big)\right)+48\varepsilon^2.$$

Daraus, wegen der Stetigkeit von I_2 folgt

$$\int_0^1(\max_{1\leq i\leq j\leq N}|s_j^{(m)}(x)-s_{i-1}^{(m)}(x)|)^2\,dx<49\varepsilon^2\qquad (m>\mu(\varepsilon)).$$

Da $\{\varphi_n(x)\}$ ein beliebiges orthonormiertes System ist, erhalten wir $I_2(a_1(m),\ldots,a_N(m))\leqq 49\varepsilon^2$ $(m>\mu(\varepsilon))$ für jedes N, woraus $\|\{a_n(m)\}\|\leqq 7\varepsilon$ $(m>\mu(\varepsilon))$ sich ergibt.

Satz V. *M ist separabel.*

Es sei $\{a_n\}\in M$. Nach Satz IV gilt $\|\{a_n\}_1^N-\{a_n\}_1^\infty\|_2\to 0$ $(N\to\infty)$. Die Klasse der endlichen Folgen ist also in M überall dicht. Wegen (2) kann jede endliche Folge mit endlichen Folgen von rationalen Zahlen in der Norm approximiert werden. Die Menge der endlichen Folgen von rationalen Zahlen ist aber abzählbar.

Satz VI. *Ist $\{a_n\}\in M$, dann gibt es eine positive, monoton ins Unendliche strebende Folge $\{\lambda_n\}$ mit $\{\lambda_n a_n\}\in M$. Ist aber $\{a_n\}\in CM$, dann gibt es eine positive, monoton zu 0 strebende Folge $\{\lambda_n\}$ mit $\{\lambda_n a_n\}\in CM$.*

Beweis des Satzes VI. Ist $\{a_n\}\in M$, dann gilt $\{a_n\}\in l^2$. So gibt es eine Indexfolge

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=n_k+1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} a_n^2<\infty. \tag{12}$$

Weiterhin, auf Grund von (4) gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} I_2(a_{n_k+1},\ldots,a_{n_{k+1}})<\infty. \tag{13}$$

Wegen (12) und (13) gibt es eine positive, monoton ins Unendliche strebende Folge $\{\Lambda_k\}$, derart, daß

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Lambda_k(k+1)\sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} a_n^2<\infty \quad\text{und}\quad \sum_{k=0}^{\infty}\Lambda_k I_2(a_{n_k+1},\ldots,a_{n_{k+1}})<\infty \tag{14}$$

bestehen. (Man kann z. B.

$$\Lambda_k=\min\left(\left(\sum_{l=k+1}^{\infty}(l+1)\sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} a_n^2\right)^{-2},\ \left(\sum_{l=k+1}^{\infty} I_2(a_{n_l+1},\ldots,a_{n_{l+1}})\right)^{-2}\right)\qquad (k=0,1,\ldots)$$

setzen.) Es sei $\lambda_n=\sqrt{\Lambda_k}$ $(n_k<n\leqq n_{k+1};\ k=0,1,\ldots)$. Dann gelten

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=n_k+1}^{\infty}\lambda_n^2 a_n^2<\infty \quad\text{und}\quad \sum_{k=0}^{\infty} I_2(\lambda_{n_k+1}a_{n_k+1},\ldots,\lambda_{n_{k+1}}a_{n_{k+1}})<\infty. \tag{15}$$

Es sei nun $\{\varphi_n(x)\}$ ein beliebiges, in $[0,1]$ orthonormiertes System. Aus (15) folgt $\{\lambda_n a_n\}\in l^2$. Nach dem Satz von Riesz—Fischer konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n a_n\varphi_n(x) \tag{16}$$

in quadratischen Mittel zu einer Funktion $f(x)\in L^2(0,1)$. Die n-te Partialsumme der Reihe (16) bezeichnen wir mit $s_n(x)$. Wegen (15) gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^1 (f(t)-s_{n_k}(t))^2\,dt<\infty,$$

woraus $\lim_{k\to\infty} s_{n_k}(x)=f(x)$ fast überall folgt. Wegen (15) besteht auch

$$\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^1 \Big(\max_{n_k<i\leqq j\leqq n_{k+1}}|\lambda_i a_i\varphi_i(x)+\ldots+\lambda_j a_j\varphi_j(x)|\Big)^2\,dx<\infty,$$

woraus $s_n(x)-s_{n_k}(x)\to 0$ $(n\to\infty;\ n_k<n\leqq n_{k+1})$ sich fast überall ergibt. Die Reihe (16) ist also für jedes orthonormierte System $\{\varphi_n(x)\}$ fast überall konvergent, d. h. $\{\lambda_n a_n\}\in M$.

Es sei $\{a_n\} \in CM$. Auf Grund von $\|\{a_n\}\| = \infty$ gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} I_2(a_{n_k+1}, \ldots, a_{n_{k+1}}) = \infty$$

für eine Indexfolge $(0=)n_0 < \ldots < n_k < \ldots$. Nach einem bekannten Satz[5]) gibt es eine positive, monoton zu 0 strebende Folge $\{\Lambda_k\}$ mit

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Lambda_k I_2(a_{n_k+1}, \ldots, a_{n_{k+1}}) = \infty.$$

Es sei $\lambda_n = \sqrt{\Lambda_k}$ $(n_k < n \leqq n_{k+1};\ k=0, 1, \ldots)$. Dann ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} I_2(\lambda_{n_k+1} a_{n_k+1}, \ldots, \lambda_{n_{k+1}} a_{n_{k+1}}) = \infty,$$

woraus, auf Grund von (4) sich ergibt, daß die Norm von $\{\lambda_n a_n\}$ nicht endlich ist, also $\{\lambda_n a_n\} \in CM$. Damit haben wir Satz VI bewiesen.

§ 4. Abschätzungen für die Norm

$C_1, C_2, \ldots$ bezeichnen positive, absolute Konstanten.

Satz VII. *Es gilt*

$$\|\{a_n\}\|_2 \leqq C_1 \left(a_1^2 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n^2 \log^2 n\right)^{1/2}. \tag{17}$$

Im Falle $|a_n| \geqq |a_{n+1}|$ $(n=1, 2, \ldots)$ *besteht*

$$\|\{a_n\}\|_2 \geqq C_2 \left(a_1^2 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n^2 \log^2 n\right)^{1/2}. \tag{18}$$

Beweis des Satzes VII. Nach einem bekannten Satz gilt

$$\int_0^1 \left(\max_{1 \leqq i \leqq j \leqq N} |c_i \varphi_i(x) + \ldots + c_j \varphi_j(x)|\right)^2 dx \leqq C_3 \log^2 N \sum_{n=1}^{N} c_n^2 \qquad (N > 1) \tag{19}$$

für jedes in $[0, 1]$ orthonormierte System $\{\varphi_n(x)\}_1^N$ [6]). Die n-te Partialsumme der Reihe (1) bezeichnen wir mit $s_n(x)$. Dann gilt

$$|s_n(x)| \leqq |s_{2^N}(x)| + \left\{\sum_{n=1}^{N} \left(s_{2^N}(x) - s_{2^{n-1}}(x)\right)^2\right\}^{1/2} +$$
$$+ \left\{\sum_{n=2}^{N} \left(\max_{2^{n-1} < i \leqq j < 2^n} |a_i \varphi_i(x) + \ldots + a_j \varphi_j(x)|\right)^2\right\}^{1/2}$$

[5]) Siehe z. B. G. H. Hardy—J. E. Littlewood—G. Pólya, *Inequalities* (Cambridge, 1934), S. 120—121.

[6]) Siehe D. E. Menchoff, loc. cit.[1]) und H. Rademacher, Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen, *Math. Annalen*, 87 (1922), 112—138.

für jedes n $(1 \leqq n \leqq 2^N)$. Auf Grund von (19) ergibt sich

$$\int_0^1 \Big(\max_{1 \leqq i \leqq j \leqq 2^N} |a_i \varphi_i(x) + \ldots + a_j \varphi_j(x)| \Big)^2 dx \leqq$$

$$\leqq C_4 \left(\sum_{i=1}^{2^N} a_i^2 + \sum_{n=1}^{N} \sum_{i=2^{n-1}+1}^{2^N} a_i^2 + \sum_{n=2}^{N} n^2 \sum_{i=2^{n-1}+1}^{2^n} a_i^2 \right) \leqq C_1 \left(a_1^2 + \sum_{n=2}^{2^N} a_n^2 \log^2 n \right)^{1/2},$$

woraus (17) sich ergibt.

Nach der Definition der Norm gilt $\|\{\pm a_n\}\|_2 = \|\{a_n\}\|_2$ offensichtlich. Zum Beweis der Ungleichung (18), ohne Beschränkung der Allgemeinheit können $a_n > 0$ und $a_1^2 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n^2 \log^2 n < 1$ vorausgesetzt werden. Dann gilt

$$a_1^2 + a_2^2 + 2a_4^2 + \sum_{n=2}^{\infty} 2^n a_{2^{n+1}}^2 n^2 \leqq 1. \tag{20}$$

Es seien $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = a_1^2$, $\alpha_2 = \alpha_1 + a_2^2$, $\alpha_3 = \alpha_2 + 2a_4^2$, $\alpha_n = \alpha_3 + \sum_{k=2}^{n-2} 2^k a_{2^{k+1}}^2 k^2$ $(n \geqq 4)$ und $c_n = \alpha_{n+1} - \alpha_n$ $(n \geqq 0)$. Es sei weiterhin $N (\geqq 4)$ eine natürliche Zahl und wir setzen

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} a_1^{-1} & (\alpha_0 \leqq x < \alpha_1), \\ 0 & \text{sonst}, \end{cases} \qquad \varphi_2(x) = \begin{cases} a_2^{-1} & (\alpha_1 \leqq x < \alpha_2), \\ 0 & \text{sonst}, \end{cases}$$

$$\varphi_3(x) = \begin{cases} (2a_4)^{-1} & (\alpha_2 \leqq x < \alpha_3), \\ 0 & \text{sonst}, \end{cases} \qquad \varphi_4(x) = \begin{cases} (2a_4)^{-1} & (\alpha_2 \leqq x < (\alpha_2 + \alpha_3)/2), \\ -(2a_4)^{-1} & ((\alpha_2 + \alpha_3)/2 \leqq x < \alpha_3), \\ 0 & \text{sonst}, \end{cases}$$

$$\varphi_{2^{n-2}+k}(x) = \varphi_k(2^{n-2}, \alpha_n, c_n; x) \qquad (k = 1, \ldots, 2^{n-2};\ n = 4, \ldots, N+1),$$

wobei $\varphi_k(p, c, \alpha; x)$ die im Hilfssatz VI erwähnten Funktionen bedeuten. Wegen (20), auf Grund der Definition der Funktionen ist $\{\varphi_n(x)\}_1^N$ ein orthonormiertes System in $[0, 1]$ und gilt

$$\int_0^1 \Big(\max_{1 \leqq i \leqq j \leqq 2^N} |a_i \varphi_i(x) + \ldots + a_j \varphi_j(x)| \Big)^2 dx =$$

$$= \int_0^1 (a_1 \varphi_1(x))^2 dx + \int_0^1 (a_2 \varphi_2(x))^2 dx + \int_0^1 \Big(\max_{3 \leqq i \leqq j \leqq 4} |a_i \varphi_i(x) + \ldots + a_j \varphi_j(x)| \Big)^2 dx +$$

$$+ \sum_{k=2}^{N-1} \int_0^1 \Big(\max_{2^k < i \leqq j \leqq 2^{k+1}} |a_i \varphi_i(x) + \ldots + a_j \varphi_j(x)| \Big)^2 dx.$$

Nach Hilfssatz VI folgt daraus

$$\int_0^1 \Big(\max_{1\le i\le j\le 2^N} |a_i\varphi_i(x)+\dots+a_j\varphi_j(x)|\Big)^2\,dx \geqq$$

$$\geqq C_5\left(a_1^2+a_2^2+a_4^2+\sum_{n=2}^{N-1} 2^{k-1}a_{2^k+1}^2(k-1)^2\right)\geqq C_2\left(a_1^2+\sum_{n=2}^{2^N} a_n^2\log^2 n\right),$$

woraus $I_2(a_1,\dots,a_{2^N})\geqq C_2\left(a_1^2+\sum_{n=2}^{2^N} a_n^2\log^2 n\right)$ sich für jedes N ergibt. (18) erhalten wir mit der Grenzübergang $N\to\infty$.

Aus Satz VII erhalten wir:

$$\|\{a_n\}\|_2^* \leqq C_1\left(A_1^2+\sum_{n=2}^{\infty} A_n^2\log^2 n\right)^{1/2}$$

und im Falle $A_n\geqq A_{n+1}$ $(n=1,2,\dots)$

$$\|\{a_n\}\|_2^* \geqq C_2\left(A_1^2+\sum_{n=2}^{\infty} A_n^2\log^2 n\right)^{1/2}. \tag{21}$$

Im Falle $m_k=2^{k-1}$ $(k=1,2,\dots;\ m_0=0)$ gilt also

$$\|\{a_n\}\|_2^* \leqq C_8\left(a_1^2+a_2^2+\sum_{n=3}^{\infty} a_n^2(\log\log n)^2\right)^{1/2}. \tag{22}$$

Ist $|a_n|=1/\sqrt{n}\lambda_n$ $(0<\lambda_n\leqq\lambda_{n+1};\ n=1,2,\dots)$, dann gibt es eine monoton abnehmende Folge $\{d_n\}$ mit $d_n\leqq A_n\leqq 2d_n$ $(n=1,2,\dots)$. Aus (21), auf Grund von (6) erhalten wir

$$\|\{a_n\}\|_2^* \geqq C_9\left(a_1^2+a_2^2+\sum_{n=3}^{\infty} a_n^2(\log\log n)^2\right)^{1/2}. \tag{23}$$

M_u bezeichnet die Klasse der Folgen $\{a_n\}_1^\infty$, für die die Reihe (1) für jedes orthonormierte System $\{\varphi_n(x)\}$ fast überall unbedingt (d. h. in jeder Anordnung ihrer Glieder fast überall) konvergiert. (Die Menge der Divergenzpunkte kann von der Umordnung und von dem System abhängen.)

Für eine Nullfolge $\{a_n\}_1^\infty$, bezeichnet $\{a_n^*\}$ eine Umordnung von $\{a_n\}$ mit $|a_n^*|\geqq|a_{n+1}^*|$ $(n=1,2,\dots)$. (Eine solche Umordnung existiert.) Es sei

$$\|\{a_n\}\|_2^{(u)}=\lim_{N\to\infty}\big(\max_P I_2^{1/2}(a_{n_1}^*,\dots,a_{n_N}^*)\big),$$

wobei das Maximum über alle Umordnungen $n_1,\dots,n_N$ der Zahlen $1,\dots,N$ gebildet wird. (Der Limes existiert ($\leqq\infty$) und hängt nicht davon ab, was für eine Umordnung $\{a_n^*\}$ gewählt wird.) Gilt $a_n\not\to 0$, dann setzen wir $\|\{a_n\}\|_2^{(u)}=\infty$. Es sei weiterhin

$$A=\begin{cases} |a_1^*|+|a_2^*|+\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left\{\sum\limits_{n=\nu_k+1}^{\nu_{k+1}} a_n^*\log^2 n\right\}^{1/2} & \text{für eine Nullfolge } \{a_n\},\\ \infty & \text{sonst,}\end{cases}$$

wobei $\nu_k = 2^{2^k}$. Es gilt $A \leqq \infty$ und A hängt nicht davon ab, was für eine Umordnung $\{a_n^*\}$ gewählt wird.

Wir beweisen den folgenden Satz.

Satz VIII. *$\{a_n\} \in M$ gilt dann und nur dann, wenn $\|\{a_n\}\|_2^{(u)} < \infty$. M_u ist mit der Norm $\|\{a_n\}\|_2^{(u)}$ ein Banachscher Raum. Weiterhin gelten die Abschätzungen*

$$C_{10} A \leqq \|\{a_n\}\|_2^{(u)} \leqq C_{11} A. \tag{24}$$

Beweis des Satzes VIII. Gilt $a_n \not\to 0$, dann ist (24) definitionsgemäß erfüllt. Es sei nun $\{a_n\}$ eine Nullfolge. Es sei N eine natürliche Zahl, $\{\varphi_n(x)\}_1^{\nu_N}$ ein in $[0, 1]$ orthonormiertes System und $n_1, \ldots, n_{\nu_N}$ eine Umordnung der Zahlen $1, \ldots, \nu_N$. Für eine natürliche Zahl k besteht $\nu_k < n_l \leqq \nu_{k+1}$ für $\nu_{k+1} - \nu_k$ verschiedene Indizes l; diese seien in Reihe nach $l(1, k) < l(2, k) < \ldots < l(\nu_{k+1} - \nu_k; k)$. Offensichtlich gilt

$$\max_{1 \leqq i \leqq j \leqq \nu_N} |a_{n_i}^* \varphi_{n_i}(x) + \ldots + a_{n_j}^* \varphi_{n_j}(x)| \leqq$$

$$\leqq |a_1^* \varphi_1(x)| + |a_2^* \varphi_2(x)| + \sum_{k=0}^{N-1} \max_{1 \leqq i \leqq j \leqq \nu_{k+1} - \nu_k} |a_{n_{l(i,k)}}^* \varphi_{n_{l(i,k)}}(x) + \ldots + a_{n_{l(j,k)}}^* \varphi_{n_{l(j,k)}}(x)|.$$

Daraus, auf Grund von (19) ergibt sich

$$\left\{\int_0^1 \Big(\max_{1 \leqq i \leqq j \leqq \nu_N} |a_{n_i}^* \varphi_{n_i}(x) + \ldots + a_{n_j}^* \varphi_{n_j}(x)|\Big)^2 dx\right\}^{1/2} \leqq$$

$$\leqq C_{11} \left(|a_1| + |a_2| + \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \sum_{n=\nu_k+1}^{\nu_{k+1}} a_n^{*2} \log^2 n \right\}^{1/2} \right) = C_{11} A_N.$$

Da $\{\varphi_n(x)\}$ ein beliebiges orthonormiertes System in $[0, 1]$ ist, erhalten wir $\max\limits_P I_2^{\frac{1}{2}}(a_{n_1}^*, \ldots, a_{n_{\nu_N}}^*) \leqq C_{11} A_N$, voraus die Zweite der Ungleichungen (24) folgt. Mit der in einer vorigen Arbeit [7]) angewandten Methode kann auch $\max\limits_P I_2^{\frac{1}{2}}(a_{n_1}^*, \ldots, a_{n_{\nu_N}}^*) \geqq C_{10} A_N$ bewiesen werden, woraus die erste Ungleichung folgt.

Wegen $M_u \subseteqq M$ folgt $a_n \to 0$ aus $\{a_n\} \in M_u$; im Falle $\{a_n\} \not\to 0$ besteht $\{a_n\} \notin M_u$. Die Behauptung $\{a_n\} \in M_u \Leftrightarrow \|\{a_n\}\|_2^{(u)} < \infty$ folgt also aus (24) und aus der bekannten Behauptung [8]):

C) *$A < \infty$ und $\{a_n\} \in M_u$ sind gleichwertig.*

Die weiteren Behauptungen des Satzes VIII sind offensichtlich. Damit haben wir Satz VIII bewiesen.

Die Orthogonalreihe (1) nennen wir sehr stark summierbar, wenn die Mittel

$$(s_{m_1}(x) + \ldots + s_{m_k}(x))/k \quad (k = 1, 2, \ldots) \quad \left(s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x)\right)$$

---

[7]) K. Tandori, Über die orthogonalen Funktionen. X (Unbedingte Konvergenz), *Acta Sci. Math.*, 23 (1962), 185–221.

[8]) Siehe: loc. cit. [7]). Die Behauptung C) ist mit den Sätzen I–II von loc. cit.[7]) äquivalent, da im Falle $a_n \not\to 0$ gilt $\{a_n\} \notin l^2$ und die Rademachersche Reihe $\Sigma a_n r_n(x)$ divergiert fast überall. (A. N. Kolmogoroff, Über die Summen durch den Zufall bestimmten unabhängigen Größen, *Math. Annalen*, 99 (1928), 309–319.; Also $\{a_n\} \notin M_u$.)

für jede Indexfolge $m_1 < \ldots < m_k < \ldots$ fast überall konvergieren. (Die Menge der Divergenzpunkte kann von der Indexfolge und von dem System $\{\varphi_n(x)\}$ abhängen.) M_s bezeichnet die Klasse der Folgen $\{a_n\}_1^\infty$, für die die Reihe (1) für jedes orthonormierte System $\{\varphi_n(x)\}$ sehr stark summeirbar ist. In der unter [2]) zitierten Arbeit haben wir bewiesen:

D) *Gilt*

$$\sum_{l=0}^{\infty} I_2(\bar{A}_{n_l+1}(\{m_k\}), \ldots, \bar{A}_{n_{l+1}}(\{m_k\})) < \infty \tag{25}$$

für jede Indexfolgen $(0=)n_0 < \ldots < n_k < \ldots$ *und* $(0=)m_0 < \ldots < m_k < \ldots$, *dann ist* $\{a_n\} \in M_s$. *Ist aber* (25) *für gewisse Indexfolgen* $\{n_k\}$ *und* $\{m_k\}$ *nicht erfüllt, dann gilt* $\{a_n\} \notin M_s$, *wobei*

$$\bar{A}_1(\{m_k\}) = (a_1^2 + \ldots + a_{m_2}^2)^{1/2}, \ \bar{A}_{l+1}(\{m_k\}) = (A_{2^l+1}^2 + \ldots + A_{2^{l+1}}^2)^{1/2} =$$
$$= (a_{m_{2^l+1}+1}^2 + \ldots + a_{m_{2^{l+1}}}^2)^{1/2} \qquad (l=0, 1, \ldots).$$

Wir setzen

$$\|\{a_n\}\|_2^{(s)} = \sup \lim_{N\to\infty} I_2^{1/2}(A_1(\{m_k\}), \ldots, A_N(\{m_k\})),$$

wobei das Supremum über alle Indexfolgen $(0=)m_0 < \ldots < m_k < \ldots$ gebildet wird. Auf Grund der Behauptung D), mit Anwendung des Satzes VII, mit Rücksicht auf (22) und (23) kann leicht bewiesen werden:

Satz IX. $\{a_n\} \in M_s$ *gilt dann und nur dann, wenn* $\|\{a_n\}\|_2^{(s)} < \infty$ *besteht.* M_s *ist in der Norm* $\|\{a_n\}\|_2^{(s)}$ *ein Banachscher Raum. Es gilt*

$$\|\{a_n\}\|_2^{(s)} \leqq C_8 \left(a_1^2 + a_2^2 + \sum_{n=3}^{\infty} a_n^2 (\log\log n)^2\right)^{1/2}$$

und im Falle $|a_n| = 1/\sqrt{n}\lambda_n$ $(0 < \lambda_n \leqq \lambda_{n+1};\ n = 1, 2, \ldots)$ *besteht auch*

$$\|\{a_n\}\|_2^{(s)} \geqq C_9 \left(a_1^2 + a_2^2 + \sum_{n=3}^{\infty} a_n^2 (\log\log n)^2\right)^{1/2}.$$

§ 5. Andere Normen in M

Auf Grund von Hilfssatz VIII und Satz I erhält man leicht:

Satz X. $\{a_n\} \in M$ *gilt dann und nur dann, wenn*

$$\|\{a_n\}\|_p = \lim_{N\to\infty} I_p^{1/p}(a_1, \ldots, a_N) < \infty \qquad (1 \leqq p \leqq 2).$$

M *ist in bezug auf diese Norm ein Banachraum.*

Der Limes existiert, da nach der Definition von I_p $I_p(a_1, \ldots, a_N) \leqq I_p(a_1, \ldots, a_{N+1})$ $(N = 1, 2, \ldots)$ gilt.

Wir erwähnen noch, daß der betrachtete Banachraum für keinen Wert von p Hilbertsch ist. Wäre nämlich M für ein p Hilbertsch, so sollte die Identität

$$\|\{a_n\}+\{b_n\}\|_p^2+\|\{a_n\}-\{b_n\}\|_p^2 = 2\|\{a_n\}\|_p^2+2\|\{a_n\}\|_p^2$$

gelten. Wir wählen insbesondere $\{a_n\}=\{0, 1, \ldots, 1, 0, \ldots\}$ (mit N komponenten 1) und $\{b_n\}=\{1, 0, \ldots\}$. Bezeichnet man das System $\overbrace{1, \ldots, 1}^{k}$ kurz mit 1_k, so ist dann $\|\{a_n\}\|_p = I_p^{1/p}(1_N)$, $\|\{b_n\}\|_p = I_p^{1/p}(1_1) = 1$, $\|\{a_n\}+\{b_n\}\|_p = \|\{a_n\}-\{b_n\}\|_p = I_p^{1/p}(1_{N+1})$, also $I_p^{2/p}(1_{N+1})=I_p^{2/p}(1_N)+1$. Da N beliebig ist, ergibt sich hieraus durch Induktion und mit Rücksicht auf (7)

$$N=NI_p^{2/p}(1)=I_p^{2/p}(1_N)\geqq\sigma I_2(1_N)$$

mit einer positiven, absolute Konstante σ. Also $I_2(1_N)\leqq\sigma^{-1}N$. Das ist aber unmöglich, da nach dem Hilfssatz VI

$$I_2(1_N)\geqq bN\log^2 N$$

mit einer positiven, absoluten Konstante b besteht.

(Eingegangen am 20. September 1963)

Über verschiedene Konvergenzarten trigonometrischer Reihen

Von LÁSZLÓ LEINDLER in Szeged

Einleitung

Es sei $f(x)$ eine 2π-periodische, in $(0, 2\pi)$ quadratisch integrierbare Funktion mit der Fourier-Entwicklung

$$(1)\qquad f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Die Untersuchung der Äquivalenz von Struktur- und Koeffizientenbedingungen wurde schon von PLESSNER [13] begonnen, indem er bewies, daß *die Koeffizientenbedingung*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \log n < \infty$$

und die Strukturbedingung

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{[f(x+t)-f(x-t)]^2}{t}\, dt\, dx < \infty$$

äquivalent sind.

Seitdem haben MARCINKIEWICZ [11], ALEXITS [1], [2], STETSCHKIN [16] und ULJANOV [20], [21] und andere diesen Satz in verschiedenen Richtungen ausgedehnt. Neulich haben ALEXITS und KRÁLIK [3] die Frage der Ersatzbarkeit der Koeffizientenbedingungen durch eine entsprechende Strukturbedingung ganz allgemein untersucht.

Bezeichne $E_n = E_n^{(2)}(f)$ den besten Annäherungsgrad von $f(x)$ im Sinne der Metrik von $L^2(0, 2\pi)$ mit trigonometrischen Polynomen $(n-1)$-ter Ordnung; bekanntlich (s. [6]) ist

$$E_n^2 = \pi \sum_{k=n}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \pi \sum_{k=n}^{\infty} \varrho_k^2.$$

Wir haben in zwei früheren Arbeiten ([9], Satz I, und [10]) u. a. bewiesen, daß jede der Bedingungen

$$(2)\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} E_n < \infty$$

und

$$(3)\qquad \int_0^{2\pi} \frac{1}{t} \left(\int_0^{2\pi} [f(x+t)-f(x-t)]^2\, dx \right)^{1/2} dt < \infty$$

hinreichend dafür ist, daß die Entwicklung (1) bei jeder Anordnung ihrer Glieder fast überall konvergiert.

Später ist es uns gelungen zu beweisen, daß Bedingungen (2) und (3) äquivalent sind. Im Zusammenhang mit diesem Ergebnis hat sie die Frage gestellt, ob ein allgemeinerer Äquivalenzsatz für Bedingungen von obiger Art gilt. Ein solcher Satz wäre deswegen sehr nützlich, weil mehrere Sätze bekannt sind, welche sich aus der auf den besten Annäherungsgrad von $f(x)$ bezüglichen Bedingung ergeben und auf eine bestimmte Konvergenz der Entwicklung (1) beziehen.

In dieser Arbeit beweisen wir den folgenden Hauptsatz, woraus wir mehrere neue und bekannte Konvergenzsätze herleiten können.

Hauptsatz. *Sei $\lambda(x)$ $(x \geqq 1)$ eine positive, monoton nichtabnehmende Funktion mit*[1])

$$\sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{n\lambda(n)} \leqq K \frac{1}{\lambda(m)} \qquad (m=1, 2, \ldots). \tag{4}$$

Die drei Bedingungen

$$\int_0^1 \frac{1}{t^2 \lambda\left(\frac{1}{t}\right)} \left(\int_0^{2\pi} [f(x+t)-f(x-t)]^2 \, dx \right)^{1/2} dt < \infty, \tag{5}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{t^2 \lambda\left(\frac{1}{t}\right)} \left(\int_0^{2\pi} [f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)]^2 \, dx \right)^{1/2} dt < \infty \tag{6}$$

und

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda(n)} E_n < \infty \tag{7}$$

sind paarweise äquivalent[2]).

Wählt man z. B. $\lambda(x) = x^{1/2}$, so ergibt sich, daß die drei Bedingungen

$$\int_0^1 \frac{1}{t^{3/2}} \left(\int_0^{2\pi} [f(x+t)-f(x-t)]^2 \, dx \right)^{1/2} dt < \infty, \tag{8}$$

$$\int_0^2 \frac{1}{t^{3/2}} \left(\int_0^{2\pi} [f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)]^2 \, dx \right)^{1/2} dt < \infty, \tag{9}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_n}{n^{1/2}} < \infty \tag{10}$$

paarweise äquivalent sind.

---

[1]) Im folgenden bezeichnen $K, K_1, K_2, \ldots$ positive, absolute Konstanten.
[2]) Zum Beweis der Implikation (5)$\Rightarrow$(6)$\Rightarrow$(7) ist die Beschränkung (4) von $\lambda(x)$ unnötig.

Hieraus und aus dem Satz von STETSCHKIN [17], laut dessen aus (10) die absolute Konvergenz von (1) folgt und bei monoton abnehmendem $\{\varrho_n^2\}$ die Bedingung (10) auch notwendig ist, ergibt sich unmittelbar der

Satz I. *Damit die Entwicklung* (1) *absolut konvergiert, ist die Bedingung* (9) *hinreichend; für monotone Koeffizientenfolgen* $\{\varrho_n\}$ *ist sie auch notwendig.*

Aus Satz I ergeben sich z. B. die folgenden bekannten Sätze:

Satz A. (SZÁSZ [18]) *Bezeichne* $\omega^{(2)}(1/n, f)$ *den quadratischen Stetigkeitsmodul von* $f(x)$. *Ist*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega^{(2)}\left(\frac{1}{n}, f\right)}{n^{1/2}} < \infty, \tag{11}$$

so ist die Entwicklung (1) *absolut konvergent.*

Satz B. (SALEM [14]) *Ist* $f(x)$ *eine* 2π*-periodische Funktion von endlicher Variation und gilt*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega\left(\frac{1}{n}, f\right)^{1/2}}{n} < \infty, \tag{12}$$

wo $\omega(\delta, f)$ *den Stetigkeitsmodul von* $f(x)$ *bedeutet, so konvergiert die Entwicklung* (1) *absolut.*

Wegen $E_n \leqq K_1 \omega^{(2)}(1/n, f)$ (s. z. B. [4], S. 882) und unserer obigen Bemerkung folgt nämlich aus (11) das Erfülltsein von (9), also folgt Satz A aus unserem Satz I. — Was den Satz B anbetrifft, bemerken wir, daß (12) mit

$$\int_0^1 \frac{1}{t}\, \omega(t, f)^{1/2}\, dt < \infty$$

gleichwertig ist, ferner wegen der endlichen Variation von $f(x)$ die Beziehung

$$\int_0^{2\pi} [f(x+2t) + f(x-2t) - 2f(x)]^2\, dx \leqq K_2 t\, \omega(t, f) \tag{13}$$

gilt. Daraus folgt unmittelbar (7), also folgt auch Satz B aus unserem Satz I.

Ebenfalls lassen sich Sätze von BERNSTEIN [5] und ZYGMUND [23], wie auch weitere Sätze über die absolute Konvergenz der Fourierreihen aus unserem Satz I leicht herleiten.

Weitere Folgerungen aus dem Hauptsatz und Satz I:

Folgerung I. *Die Bedingung* (9) *zieht die absolute Konvergenz der Entwicklung von* $|f(x)|$ *nach sich.*

Diese ist nach der Ungleichung $\big(|f(x+t)| - |f(x-t)|\big)^2 \leqq \big(f(x+t) - f(x-t)\big)^2$ klar.

Die Bedingung (9) ist daher im allgemeinen für die absolute Konvergenz der Fourierreihe von $f(x)$ nicht notwendig, da es nach einem Ergebnis von KAHANE [7] eine Funktion $f(x)$ gibt, so daß die Fourierreihe von $f(x)$ absolut konvergiert, diejenige von $|f(x)|$ dagegen nicht. Wenn aber $\varrho_n \geqq \varrho_{n+1}$ ist, so hat unser Satz I die

Folgerung II. *Ist $\{\varrho_n\}$ monoton abnehmend, so impliziert die absolute Konvergenz der Fourierreihe von $f(x)$ die absolute Konvergenz der Fourierreihe von $|f(x)|$.*

Folgerung III. *Ist $|f(x)| \geqq c > 0$ fast überall, so ist auch die Fourierreihe von $1/f(x)$ unter der Bedingung (9) absolut konvergent.*

Dies folgt aus der Ungleichung $\left(\frac{1}{f(x+t)} - \frac{1}{f(x-t)}\right)^2 \leqq \frac{1}{c^4}\left(f(x+t) - f(x-t)\right)^2$. Im Spezialfall $\varrho_n \downarrow 0$ folgt hieraus der wohlbekannte Satz von WIENER [22].

Wählt man $\lambda(x) = x$ im Satz I, so ergibt sich, daß die drei Bedingungen

$$\int_0^1 \frac{1}{t}\left(\int_0^{2\pi} [f(x+t) - f(x-t)]^2\, dx\right)^{1/2} dt < \infty, \tag{14}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{t}\left(\int_0^{2\pi} [f(x+2t) + f(x-2t) - 2f(x)]^2\, dx\right)^{1/2} dt < \infty, \tag{15}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} E_n < \infty \tag{16}$$

paarweise äquivalent sind.

Hieraus und aus einem Satz des Verfassers (Satz I in [9]), welcher u. a. behauptet, daß die Entwicklung (1) unter der Bedingung (16) fast überall unbedingt, d. h. bei jeder Anordnung ihrer Glieder konvergiert, folgt unmittelbar der

Satz II. *Unter der Bedingung (15) konvergiert die Entwicklung (1) fast überall unbedingt, d. h. bei jeder Anordnung ihrer Glieder.*[3])

Satz II hat z. B. die Folgerungen:

Folgerung IV. *Genügt $f(x)$ einer Lipschitzbedingung α-ter Ordnung mit $\alpha > 0$, bzw. ist $f(x)$ von endlicher Variation, so konvergiert ihre Fourier-Entwicklung unbedingt.*

Folgerung V. *Unter der Bedingung (15) konvergiert die Fourierreihe von $|f(x)|$ fast überall unbedingt, und im Fall $|f(x)| \geqq c > 0$ konvergiert auch die Fourierreihe von $1/f(x)$ fast überall unbedingt.*

Folgerung VI. *Ist (15) erfüllt, so konvergiert die konjugierte Reihe von (1) fast überall unbedingt.*

VI ergibt sich daraus, daß die Bedingungen (15) und (16) äquivalent sind.

---

[3]) Wir haben schon in [10] bewiesen, daß die Entwicklung (1) unter der Bedingung (14) unbedingt konvergiert.

SALEM und ZYGMUND [15] haben bewiesen, daß unter der Bedingung

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{E_n}{n[\log n]^{1/2}} < \infty \tag{17}$$

die Reihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \pm (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{18}$$

bei fast allen Vorzeichenverteilungen gleichmäßig konvergiert.

Aus dem Hauptsatz, mit $\lambda(x) = x\,[\log(x+1)]^{1/2}$, ergibt sich, daß die Bedingungen

$$\int_0^1 \frac{1}{t\left[\log\left(\frac{1}{t}+1\right)\right]^{1/2}} \left(\int_0^{2\pi} [f(x+t)-f(x-t)]^2\, dx\right)^{1/2} dt < \infty, \tag{19}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{t\left[\log\left(\frac{1}{t}+1\right)\right]^{1/2}} \left(\int_0^{2\pi} [f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)]^2\, dx\right)^{1/2} dt < \infty \tag{20}$$

und (17) paarweise äquivalent sind.

Hieraus und aus dem zitierten Satz von SALEM und ZYGMUND ergibt sich der

Satz III. *Unter der Bedingung* (20) *konvergiert die Reihe* (18) *bei fast allen Vorzeichenverteilungen gleichmäßig.*

Dieser Satz hat unmittelbar die

Folgerung IX. *Ist*

$$\int_0^1 \frac{\omega(t,f)}{t\left[\log\left(\frac{1}{t}+1\right)\right]^{1/2}}\, dt < \infty,$$

so ist die Reihe (18) *bei fast allen Vorzeichenverteilungen gleichmäßig konvergent.*

Folgerung X. *Ist $f(x)$ von endlicher Variation, so konvergiert ihre Fourierreihe bei fast allen Vorzeichenverteilungen gleichmäßig.* (Siehe die Ungleichung (13).)

Folgerung XI. *Unter der Bedingung* (20) *konvergiert die Reihe*

$$|f(x)| \sim \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \pm (A_n \cos nx + B_n \sin nx)$$

bei fast allen Vorzeichenverteilungen gleichmäßig. Ist außerdem $|f(x)| \geqq c > 0$, so konvergiert auch die Reihe

$$\frac{1}{f(x)} \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \pm (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx)$$

bei fast allen Vorzeichenverteilungen gleichmäßig.

Wir beweisen ferner den

Satz IV. *Es sei* $\{r_n\}$ *eine positive, monoton wachsende Zahlenfolge mit der Eigenschaft*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nr_n} < \infty. \tag{21}$$

Besteht

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varrho_n^2 r_n < \infty, \tag{22}$$

so konvergiert die Reihe (18) *bei fast allen Vorzeichenverteilungen gleichmäßig.*

Dieser Satz ist eine Verschärfung des Satzes von PALEY und ZYGMUND [12], daß unter der Bedingung $\Sigma \varrho^2 \log^{1+\varepsilon} n < \infty$ die Reihe (18) bei fast allen Vorzeichenverteilungen gleichmäßig konvergiert.

Bezeichne $\sigma_n^{(\alpha)}(x)$ das n-te (C, α)-Mittel $(\alpha > -1)$ der allgemeinen Orthogonalreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x). \tag{23}$$

Verfasser hat in [8] u. a. folgendes bewiesen (s. noch [19]): Damit die Reihe (23) für jedes orthonormierte Funktionensystem im Grundintervall fast überall $|C, \alpha|$-summierbar[4]) (absolut (C, α)-summierbar) sei, ist im Falle $\alpha > \frac{1}{2}$ die Bedingung

$$\sum_{m=2}^{\infty}{}' C_m < \infty \quad \text{mit} \quad C_m = \left\{ \sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} c_n^2 \right\}^{1/2}, \tag{24}$$

im Falle $\alpha = \frac{1}{2}$ die Bedingung

$$\sum_{m=1}^{\infty} m^{1/2} C_m < \infty \tag{25}$$

und im Falle $-1 < \alpha < \frac{1}{2}$ die Bedingung

$$\sum_{m=1}^{\infty} 2^{\frac{m}{2}(1-2\alpha)} C_m < \infty \tag{26}$$

hinreichend.

Für das trigonometrische System folgen (24), (25) und (26) aus den Ungleichungen

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^{1/2}} E_n < \infty, \tag{27}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} E_n < \infty \tag{28}$$

und

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2+\alpha}} E_n < \infty. \tag{29}$$

---

[4]) Die Orthogonalreihe (23) heißt fast überall $|C, \alpha|$-summierbar, wenn fast überall gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\sigma_{n+1}^{(\alpha)}(x) - \sigma_n^{(\alpha)}(x)| < \infty.$$

Es genügt die Implikation (27)$\Rightarrow$(24) zu bewiesen, da sich die beiden anderen auf ähnliche Weise ergeben. Setzen wir $c_n^2 = a_n^2 + b_n^2$, so gilt

$$\sum_{m=2}^{\infty} C_m = \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{m=2^\mu}^{2^{\mu+1}-1} C_m \leqq \sum_{\mu=1}^{\infty} \left\{ \sum_{m=2^\mu}^{2^{\mu+1}-1} 1 \sum_{m=2^\mu}^{2^{\mu+1}-1} C_m^2 \right\} \leqq \sum_{\mu=1}^{\infty} 2^{\mu/2} E_{2^{2^\mu}} =$$

$$= O(1) \sum_{\mu=1}^{\infty} \left(\sum_{n=2^{2^{\mu-1}}+1}^{2^{2^\mu}} \frac{1}{n(\log n)^{1/2}} \right) E_{2^{2^\mu}} = O(1) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^{1/2}} E_n .$$

Die Reihe (1) ist also unter den Bedingungen (27) bzw. (28) bzw. (29) fast überall $|C, \alpha > \frac{1}{2}|$- bzw. $|C, \frac{1}{2}|$- bzw. für $-\frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{2}$ $|C, \alpha|$-summierbar. Daraus folgt auf Grund von Satz I der

Satz V. *Die Reihe* (1) *ist unter der Bedingung*

$$\int_0^1 \frac{1}{t\left[\log\left(\frac{1}{t}+1\right)\right]^{1/2}} \left(\int_0^{2\pi} [f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)]^2\, dx \right)^{1/2} dt < \infty$$

fast überall $|C, \alpha|$*-summierbar* $(\alpha > \frac{1}{2})$, *unter der Bedingung*

$$\int_0^1 \frac{1}{t} \left(\int_0^{2\pi} [f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)]^2\, dx \right)^{1/2} dt < \infty$$

fast überall $|C, \frac{1}{2}|$*-summierbar, und unter der Bedingung*

$$\int_0^1 \frac{1}{t^{3/2-\alpha}} \left(\int_0^{2\pi} [f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)]^2\, dx \right)^{1/2} dt < \infty$$

fast überall $|C, \alpha|$*-summierbar* $(-\frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{2})$.

Aus dem Hilfssatz III ergibt sich unmittelbar der

Satz VI. *Die Bedingungen* (8), (14), (19) *sind der Reihe nach gleichwertig damit, daß es positive meßbare Funktionen* $\varrho(t)$, $\gamma(t)$, $\mu(t)$ *gibt, mit den Eigenschaften*

(30) $$\int_0^1 \frac{1}{t^3 \varrho(t)}\, dt < \infty \quad \textit{und} \quad \int_0^1 \int_0^{2\pi} \varrho(t)[f(x+t)-f(x-t)]^2\, dx\, dt < \infty,$$

(31) $$\int_0^1 \frac{1}{t^2 \gamma(t)}\, dt < \infty \quad \textit{und} \quad \int_0^1 \int_0^{2\pi} \gamma(t)[f(x+t)-f(x-t)]^2\, dx\, dt < \infty,$$

(32) $$\int_0^1 \frac{1}{t^2 \log\left(\frac{1}{t}+1\right) \mu(t)}\, dt < \infty \quad \textit{und} \quad \int_0^1 \int_0^{2\pi} \mu(t)[f(x+t)-f(x-t)]^2\, dx\, dt < \infty.$$

Bezeichne $\Omega(\delta, f)$ eine der „quadratischen Moduln"

$$\left.\begin{matrix}\omega^{(2)}(\delta,f)\\ \omega_2^{(2)}(\delta,f)\end{matrix}\right\} = \sup_{0\le t\le\delta}\left\{\int_{-\pi}^{\pi}\begin{matrix}[f(x+t)-f(x-t)]^2\\ [f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)]^2\end{matrix}\,dx\right\}^{1/2},$$

$$\left.\begin{matrix}w^{(2)}(\delta,f)\\ w_2^{(2)}(\delta,f)\end{matrix}\right\} = \left\{\frac{1}{\delta}\int_0^{\delta}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\begin{matrix}[f(x+t)-f(x-t)]^2\\ [f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)]^2\end{matrix}\,dx\right)dt\right\}^{1/2}.$$

Aus den Sätzen I—III und aus dem Hilfssatz IV ergibt sich der

Satz VII. *Ist die Bedingung*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Omega\left(\frac{1}{n},f\right)}{n^{1/2}}<\infty \quad bzw. \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Omega\left(\frac{1}{n},f\right)}{n}<\infty \quad bzw. \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Omega\left(\frac{1}{n},f\right)}{n(\log n)^{1/2}}<\infty$$

erfüllt, so konvergiert die Reihe (1) *absolut bzw. fast überall unbedingt bzw. konvergiert die Reihe* (18) *gleichmäßig bei fast allen Vorzeichenverteilungen.*

Die Bisherigen haben die

Folgerung XII. *Die Bedingungen* (8)—(10), (30) *und* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Omega\left(\frac{1}{n},f\right)}{n^{1/2}}<\infty$ *bzw.* (14)—(16), (31) *und* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Omega\left(\frac{1}{n},f\right)}{n}<\infty$ *bzw.* (17), (19), (20), (32) *und* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Omega\left(\frac{1}{n},f\right)}{n(\log n)^{1/2}}<\infty$ *sind alle paarweise äquivalent.*

Wir bemerken, daß STETSCHKIN [16] die Äquivalenz der Bedingungen (10), $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1/2}}\omega^{(2)}\left(\frac{1}{n},f\right)<\infty$ und $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1/2}}\omega_2^{(2)}\left(\frac{1}{n},f\right)<\infty$ schon früher bewiesen hat.

Es ist klar, daß man analoge Folgerungen auch für die $|C,\alpha|$-Summierbarkeit erhalten kann.

Ich möchte dem Herrn Professor G. ALEXITS für seine wertwollen Ratschläge bei der Zusammenstellung dieser Arbeit meinen aufrichtigen Dank aussprechen.

§ 1. Hilfssätze

Hilfssatz I. *Ist* $f(x)\in L^2(-\pi,\pi)$, *so gilt*

$$\left[\omega^{(2)}\left(\frac{1}{n},f\right)\right]^2 \le \frac{8\pi}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k\sum_{\nu=k}^{\infty}\varrho_\nu^2. \tag{1.1}$$

Dieser Hilfssatz ist bekannt, siehe z. B. [4], S. 348, oder [1], [16].

Hilfssatz II. *Ist $f(x) \in L^2(-\pi, \pi)$, so gilt*

$$(1.2)\qquad n\int_0^{1/n}\left\{\int_0^{2\pi}[f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)]^2\,dx\right\}dt \geqq E_n^2.$$

Beweis. Nach der Parsevalschen Gleichung ist

$$\int_0^{2\pi}[f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)]^2\,dx = 16\pi\sum_{k=1}^{\infty}\varrho_k^2\sin^4 kt.$$

Daraus folgt

$$n\int_0^{1/n}\left\{\int_0^{2\pi}[f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)]^2\,dx\right\}dt \geqq 4\pi n\sum_{k=n}^{\infty}\varrho_k^2\int_0^{1/n}(1-\cos 2kt)^2\,dt \geqq$$

$$\geqq 4\pi\sum_{k=n}^{\infty}\varrho_k^2 - 8\pi n\sum_{k=n}^{\infty}\varrho_k^2\int_0^{1/n}\cos 2kt\,dt + 4\pi n\sum_{k=n}^{\infty}\varrho_k^2\int_0^{1/n}\cos^2 2kt\,dt \geqq$$

$$\geqq 2\pi n\sum_{k=n}^{\infty}\varrho_k^2\int_0^{1/n}(1+\cos 4kt)\,dt \geqq 2\pi\sum_{k=n}^{\infty}\varrho_k^2 + 2\pi n\sum_{k=n}^{\infty}\varrho_k^2\,\frac{\sin 4k/n}{4k} \geqq$$

$$\geqq 2E_n^2 - \frac{1}{2}E_n^2 \geqq E_n^2,$$

womit der Hilfssatz II bewiesen ist.

Hilfssatz III. *$\Phi(t)$ und $\beta(t)$ seien meßbare Funktionen, $\Phi(t) \geqq 0$, $\beta(t) > 0$ $(a \leqq t \leqq b)$. Die Bedingung*

$$(1.3)\qquad \int_a^b \frac{\Phi(t)}{\beta(t)}\,dt < \infty$$

ist gleichwertig damit, daß es eine meßbare Funktion $\eta(t) > 0$ gibt, mit den Eigenschaften

$$(1.4)\qquad \int_a^b \frac{1}{\beta^2(t)\eta(t)}\,dt < \infty \quad \text{und} \quad \int_a^b \eta(t)\Phi^2(t)\,dt < \infty.$$

Beweis. Die Implikation $(1.4) \Rightarrow (1.3)$ folgt durch die Schwarzsche Ungleichung:

$$\left\{\int_a^b \frac{\Phi(t)}{\beta(t)}\,dt\right\}^2 \leqq \int_a^b \frac{1}{\beta^2(t)\eta(t)}\,dt \cdot \int_a^b \eta(t)\Phi^2(t)\,dt.$$

Zum Beweis der Implikation $(1.3) \Rightarrow (1.4)$ setzen wir $\eta(t)$ gleich $[\beta(t)\Phi(t)]^{-1}$ wenn $\Phi(t) > 0$, und gleich $[\beta^2(t)]^{-1}$ wenn $\Phi(t) = 0$. Die Ungleichungen (1.4) folgen dann aus der Definition von $\eta(t)$ und (1.3).

Hilfssatz IV. *Sei $\lambda(x)$ $(x \geqq 1)$ eine positive, monoton nichtabnehmende Funktion, welche der Bedingung* (4) *genügt. Dann sind Bedingung* (7) *und die folgenden Bedingungen*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda(n)} \omega^{(2)}\left(\frac{1}{n}, f\right) < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda(n)} \omega_2^{(2)}\left(\frac{1}{n}, f\right) < \infty, \tag{1.5}$$

und

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda(n)} w^{(2)}\left(\frac{1}{n}, f\right) < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda(n)} w_2^{(2)}\left(\frac{1}{n}, f\right) < \infty \tag{1.6}$$

paarweise äquivalent.

Beweis. Zuerst zeigen wir, daß Bedingung (7) die anderen nach sich zieht. Offenbar bestehen die folgenden Ungleichungen:

$$w^{(2)}\left(\frac{1}{n}, f\right) \leqq \omega^{(2)}\left(\frac{1}{n}, f\right), \quad w_2^{(2)}\left(\frac{1}{n}, f\right) \leqq \omega_2^{(2)}\left(\frac{1}{n}, f\right), \tag{1.7}$$

$$\omega_2^{(2)}\left(\frac{1}{n}, f\right) \leqq 2\omega^{(2)}\left(\frac{1}{n}, f\right), \quad w_2^{(2)}\left(\frac{1}{n}, f\right) \leqq 2w^{(2)}\left(\frac{1}{n}, f\right). \tag{1.8}$$

Auf Grund dieser Ungleichungen genügt es zu zeigen, daß die erste Bedingung von (1. 5) aus (7) folgt. Dies ergibt sich durch Anwendung des Hilfssatzes I.

In der Tat besteht nach (1. 1)

$$\frac{1}{4} \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{\lambda(n)} \omega^{(2)}\left(\frac{1}{n}, f\right) \leqq \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{n\lambda(n)} \left(\sum_{k=1}^{n} kE_k^2\right)^{1/2} \leqq \tag{1.9}$$

$$\leqq \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} \frac{1}{n\lambda(n)} \sum_{\nu=1}^{m} \left(\sum_{k=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}} kE_k^2\right)^{1/2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\lambda(n)} (E_1 + 2E_2) = \Sigma_1 + \Sigma_2.$$

Die zweite Summe Σ_2 ist nach (4) endlich, die erste kann man einfach abschätzen:

$$\Sigma_1 \leqq 2 \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} \frac{1}{n\lambda(n)} \sum_{\nu=1}^{m} 2^\nu E_{2^\nu} \leqq \tag{1.10}$$

$$\leqq 2 \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{\lambda(2^m)} \sum_{\nu=1}^{m} 2^\nu E_{2^\nu} \leqq 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} 2^\nu E_{2^\nu} \sum_{m=\nu}^{\infty} \frac{1}{\lambda(2^m)}.$$

Nach (4) gilt

$$\sum_{m=\nu}^{\infty} \frac{1}{\lambda(2^m)} \leqq 2 \sum_{m=\nu+1}^{\infty} \sum_{n=2^{m-1}+1}^{2^m} \frac{1}{n\lambda(2^m)} + \frac{1}{\lambda(2^\nu)} \leqq \tag{1.11}$$

$$\leqq 2 \sum_{n=2^\nu+1}^{\infty} \frac{1}{n\lambda(n)} + \frac{1}{\lambda(2^\nu)} \leqq (2K+1) \frac{1}{\lambda(2^\nu)}.$$

Aus (1. 10) und (1. 11) ergibt sich

$$\Sigma_1 \leqq (4K+2) \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2^\nu}{\lambda(2^\nu)} E_{2^\nu} \leqq (8K+4) \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{k=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu} \frac{1}{\lambda(k)} E_k < \infty. \tag{1.12}$$

Nach (1. 9) und (1. 12) impliziert die Ungleichung (7) die Beziehung (1. 5). Damit haben wir bewiesen, daß aus (7) die Ungleichungen (1. 5) und (1. 6) folgen. Wir haben noch zu zeigen, daß (7) aus der zweiten Ungleichung von (1. 6) folgt. Nach (1. 2) gilt aber die Ungleichung

$$E_n \leqq w_2^{(2)}\left(\frac{1}{n}, f\right),$$

und diese Abschätzung macht unsere Behauptung klar.

Hilfssatz V. *Die Bedingung* (17) *ist gleichwertig damit, daß es eine positive, monoton wachsende Zahlenfolge* $\{r_n\}$ *mit den Eigenschaften* (21) *und* (22) *gibt.*

Beweis. Zunächst zeigen wir, daß (17) aus (21) und (22) folgt. Es gilt nämlich erstens

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{n[\log n]^{1/2}} E_n \leqq \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=2^{2^m}+1}^{2^{2^{m+1}}} \frac{1}{n(\log n)^{1/2}} \sum_{\nu=m}^{\infty} \left(\sum_{k=2^{2^\nu}+1}^{2^{2^{\nu+1}}} \varrho_k^2 \right)^{1/2} \leqq \tag{1.13}$$

$$\leqq 4 \sum_{m=1}^{\infty} 2^{m/2} \sum_{\nu=m}^{\infty} \left(\sum_{k=2^{2^\nu}+1}^{2^{2^{\nu+1}}} \varrho_k^2 \right)^{1/2} \leqq 16 \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n/2} \left(\sum_{k=2^{2^n}+1}^{2^{2^{n+1}}} \varrho_k^2 \right)^{1/2}.$$

Aus (21) folgt ferner

$$\sum_{m=1}^{\infty} 2^m \frac{1}{r_{2^{2^m}}} \leqq K \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=2^{2^{m-1}}+1}^{2^{2^m}} \frac{1}{nr_n} \leqq K \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nr_n} < \infty \tag{1.14}$$

und aus (22)

$$\sum_{m=1}^{\infty} r_{2^{2^m}} \sum_{n=2^{2^m}+1}^{2^{2^{m+1}}} \varrho_k^2 \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \varrho_n^2 r_n < \infty. \tag{1.15}$$

Mit Anwendung der Cauchyschen Ungleichung ergibt sich

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n/2} \left(\sum_{k=2^{2^n}+1}^{2^{2^{n+1}}} \varrho_k^2 \right)^{1/2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n/2}}{\sqrt{r_{2^{2^n}}}} \sqrt{r_{2^{2^n}}} \left(\sum_{k=2^{2^n}+1}^{2^{2^{n+1}}} \varrho_k^2 \right)^{1/2} \leqq$$

$$\leqq \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{r_{2^{2^n}}} \sum_{n=1}^{\infty} r_{2^{2^n}} \sum_{k=2^{2^n}+1}^{2^{2^{n+1}}} \varrho_k^2 \right\}^{1/2}.$$

Daraus ist die Implikation $\{(21) \text{ und } (22)\} \Rightarrow (17)$ wegen (1. 13), (1. 14) und (1. 15) ersichtlich.

Nun beweisen wir, daß unter der Bedingung (17) eine positive, monoton wachsende Zahlenfolge $\{r_n\}$ existiert, die (22) erfüllt. Setzen wir nämlich

$$r_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(\log k)^{1/2} E_k},$$

so folgt durch eine Abelsche Umformung

$$\sum_{n=2}^{\infty} \varrho_n^2 r_n = \sum_{n=2}^{\infty} \varrho_n^2 \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(\log k)^{1/2} E_k} =$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\log k)^{1/2} E_k} \sum_{n=k}^{\infty} \varrho_n^2 \leqq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\log k)^{1/2}} E_k,$$

womit (17)⇒(22) bewiesen ist.

Wir übergehen nun zum Beweis der Implikation (17)⇒(21). Es gilt

$$\sum_{n=17}^{\infty} \frac{1}{n r_n} = \sum_{n=17}^{\infty} \left[n \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(\log k)^{1/2} E_k} \right]^{-1} \leqq$$

$$\leqq \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{n=2^{2^m}+1}^{2^{2^{m+1}}} \left[n \sum_{k=2^{2^{m-1}}+1}^{2^{2^m}} \frac{1}{k(\log k)^{1/2} E_k} \right]^{-1} \leqq$$

$$\leqq K_3 \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{n=2^{2^m}+1}^{2^{2^{m+1}}} \left[n \frac{1}{E_{2^{2^{m-1}}} 2^{m/2}} 2^m \right]^{-1} \leqq K_4 \sum_{m=2}^{\infty} 2^{m/2} E_{2^{2^{m-1}}} \leqq$$

$$\leqq K_5 \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{n=2^{2^{m-2}}+1}^{2^{2^{m-1}}} \frac{1}{n(\log n)^{1/2}} E_{2^{2^{m-1}}} \leqq K_5 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^{1/2}} E_n,$$

womit die Implikation (17)⇒(21) und damit auch der Hilfssatz V vollständig bewiesen sind.

§ 2. Beweis des Hauptsatzes

Die Implikation (5)⇒(6) ist trivial; wir übergehen also zum Beweis der Implikation (6)⇒(7). Ist $f(x)$ in $(0, 2\pi)$ fast überall konstant, oder $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda(n)} < \infty$, so ist die Behauptung klar. Wir nehmen also an, daß $f(x)$ nicht fast überall konstant ist und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda(n)} = \infty$ ist. Nach der Parsevalschen Gleichung gilt

$$F(t) = \int_0^{2\pi} [f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)]^2 \, dx = 16\pi \sum_{k=1}^{\infty} \varrho_k^2 \sin^4 kt. \tag{2.1}$$

Nach dem Obigen ist die Funktion

$$\alpha(t) = \left(t^2 \lambda\left(\frac{1}{t}\right) [F(t)]^{1/2} \right)^{-1}$$

fast überall endlich. Aus der Bedingung (6) und der Definition von $\alpha(t)$ ergibt sich

$$\int_0^1 \frac{1}{t^4\lambda^2\left(\frac{1}{t}\right)\alpha(t)}\,dt<\infty \tag{2.2}$$

und

$$\int_0^1\int_0^{2\pi} \alpha(t)[f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)]^2\,dx\,dt<\infty. \tag{2.3}$$

Aus (2. 1) und (2. 3) folgt, auf Grund des Satzes von FUBINI,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\varrho_k^2\int_0^1 \alpha(t)\sin^4 kt\,dt<\infty. \tag{2.4}$$

Wir bezeichnen mit I_k die Menge derjenigen Punkte t von [0, 1], für die $\sin^4 kt\geqq\frac{1}{4}$ ist und wir setzen

$$I(k)=\int_{I_k}\alpha(t)\,dt.$$

Nach (2. 4) besteht

$$\sum_{k=1}^{\infty}\varrho_k^2 I(k)<\infty. \tag{2.5}$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann $\lambda(1)\geqq 1$ angenommen werden. Es sei $\{p_m\}$ eine Folge von natürlichen Zahlen, für die

$$2^m\leqq\sum_{n=p_m+1}^{p_{m+1}}\frac{1}{\lambda(n)}\leqq 2^{m+1}\qquad (m=0,1,\ldots) \tag{2.6}$$

gilt. Die Existenz einer solchen Folge $\{p_m\}$ ist auf Grund der bezüglich $\lambda(x)$ getroffenen Bedingungen offenbar. Wir definieren nun die Folge $\{k_m\}$ folgenderweise: es sei k_m die kleinste unter den natürlichen Zahlen n, für die $p_m<n\leqq p_{m+1}$ ist und

$$I(n)=\min_{p_m<k\leqq p_{m+1}}\{I(k)\}$$

gilt. Wir zeigen, daß

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2^{2m}}{I(k_m)}<\infty \tag{2.7}$$

ist. Zuerst beweisen wir, daß die Beziehung

$$I(k_m)\geqq\frac{1}{2^{14}}2^{2m}\left(\int_{1/p_{m-2}}^{1/p_{m-3}}\left[t^4\lambda^2\left(\frac{1}{t}\right)\alpha(t)\right]^{-1}dt\right)^{-1} \tag{2.8}$$

gilt. Es sei $\Delta_m=\left[\frac{1}{p_{m-2}},\frac{1}{p_{m-3}}\right]$. Durch Anwendung der Cauchyschen Ungleichung erhält man

$$(2.9)\quad \left(\int\limits_{(\Delta_{m-1}\cup\Delta_m)\cap I_{k_m}} \left[t^2\lambda\left(\frac{1}{t}\right)\right]^{-1} dt\right)^2 \leqq \int\limits_{I_{k_m}} \alpha(t)\,dt\cdot \int\limits_{\Delta_{m-1}\cup\Delta_m} \left[t^4\lambda^2\left(\frac{1}{t}\right)\alpha(t)\right]^{-1} dt \leqq$$

$$\leqq l(k_m) \int\limits_{\Delta_{m-1}\cup\Delta_m} \left[t^4\lambda^2\left(\frac{1}{t}\right)\alpha(t)\right]^{-1} dt.$$

Das Integral links kann man wegen der Monotonität von $\lambda(x)$ folgenderweise abschätzen:

$$(2.10)\quad \int\limits_{(\Delta_{m-1}\cup\Delta_m)\cap I_{k_m}} \left[t^2\lambda\left(\frac{1}{t}\right)\right]^{-1} dt \geqq \frac{1}{2^4}\int\limits_{\Delta_m}\left[t^2\lambda\left(\frac{1}{t}\right)\right]^{-1} dt = \frac{1}{2^4}\int\limits_{\bar{\Delta}_m}\frac{1}{\lambda(x)}\,dx,$$

wobei $\bar{\Delta}_m$ das Intervall $[p_{m-3}, p_{m-2}]$ bezeichnet. Nach (2.6) ist

$$\int\limits_{\bar{\Delta}_m}\frac{1}{\lambda(x)}\,dx \geqq \sum_{n=p_{m-3}+1}^{p_{m-2}} \frac{1}{\lambda(n)} \geqq 2^{m-3},$$

somit ergibt sich aus (2. 9) und (2. 10) die Ungleichung (2. 8). Aus (2.2) und (2. 8) folgt die Ungleichung (2. 7) unmittelbar. Um den Beweis der Implikation (6)$\Rightarrow$(7) zu führen, haben wir nur noch zu zeigen, daß die Ungleichung (7) aus (2. 5) und (2. 7) folgt. Mit einfacher Rechnung ergibt sich

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=p_0+1}^{\infty}\frac{1}{\lambda(n)}E_n = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=p_m+1}^{p_{m+1}}\frac{1}{\lambda(n)}\left(\sum_{k=n}^{\infty}\varrho_k^2\right)^{1/2} \leqq$$

$$\leqq \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=p_m+1}^{p_{m+1}}\frac{1}{\lambda(n)}\sum_{\nu=m}^{\infty}\left(\sum_{k=p_\nu+1}^{p_{\nu+1}}\varrho_k^2\right)^{1/2} \leqq$$

$$\leqq 2\sum_{m=0}^{\infty}2^m\sum_{\nu=m}^{\infty}\left(\sum_{k=p_\nu+1}^{p_{\nu+1}}\varrho_k^2\right)^{1/2} \leqq 4\sum_{m=0}^{\infty}2^m\left(\sum_{k=p_m+1}^{p_{m+1}}\varrho_k^2\right)^{1/2}.$$

Daraus erhalten wir weiter durch Anwendung der Cauchyschen Ungleichung

$$\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\sum_{n=p_0+1}^{\infty}\frac{1}{\lambda(n)}E_n \leqq \sum_{m=0}^{\infty}[l(k_m)]^{1/2}\left(\sum_{k=p_m+1}^{p_{m+1}}\varrho_k^2\right)^{1/2}\cdot\frac{2^m}{[l(k_m)]^{1/2}} \leqq$$

$$\leqq \left\{\sum_{m=0}^{\infty} l(k_m)\sum_{k=p_m+1}^{p_{m+1}}\varrho_k^2\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2^{2m}}{l(k_m)}\right\}^{1/2},$$

woraus das Erfülltsein der Bedingung (7) auf Grund der Definition von $l(k_m)$ und der Ungleichungen (2. 5) und (2. 7) folgt, womit die Implikation (6)$\Rightarrow$(7) bewiesen ist.

Wir beweisen nun die Implikation (7)$\Rightarrow$(5). Nach der Parsevalschen Gleichung gilt

$$\int_0^{2\pi} [f(x+t)-f(x-t)]^2\,dx = 4\pi \sum_{k=1}^{\infty} \varrho_k^2 \sin^2 kt,$$

somit besteht

$$(2.11)\qquad A(\lambda, f) = \frac{1}{(4\pi)^{1/2}} \int_0^1 \frac{1}{t^2\lambda\left(\frac{1}{t}\right)} \left(\int_0^{2\pi} [f(x+t)-f(x-t)]^2\,dx\right)^{1/2} dt =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{t^2\lambda\left(\frac{1}{t}\right)} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \varrho_k^2 \sin^2 kt\right)^{1/2} dt =$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n-1}} \frac{1}{t^2\lambda\left(\frac{1}{t}\right)} \left[\left(\sum_{k=1}^{n} \varrho_k^2 k^2 t^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \varrho_k^2\right)^{1/2}\right] dt \leqq$$

$$\leqq \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \varrho_k^2 k^2\right)^{1/2} \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n-1}} \frac{1}{t\lambda\left(\frac{1}{t}\right)} dt + \sum_{n=2}^{\infty} E_{n+1} \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n-1}} \frac{1}{t^2\lambda\left(\frac{1}{t}\right)} dt.$$

Die letzten zwei Integrale sind höchstens gleich $\frac{2}{\lambda(n-1)\cdot n}$ bzw. $\frac{1}{\lambda(n-1)}$, also ist nach (2.11)

$$(2.12)\qquad A(\lambda, f) \leqq \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \varrho_k^2 k^2\right)^{1/2} \frac{2}{\lambda(n-1)\cdot n} + \sum_{n=2}^{\infty} E_{n+1} \frac{1}{\lambda(n-1)}.$$

Die zweite Summe ist endlich. Die erste ist ebenfalls endlich, was man aus folgender Abschätzung ersehen kann:

$$(2.13)\qquad \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\lambda(n-1)} \left(\sum_{k=1}^{n} \varrho_k^2 k^2\right)^{1/2} \leqq \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\lambda(n-1)} (\varrho_1^2 + 4\varrho_2^2)^{1/2} +$$

$$+ 2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} \frac{1}{n\lambda(n-1)} \sum_{\nu=1}^{m} 2^\nu \left(\sum_{k=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}} \varrho_k^2\right)^{1/2}.$$

Hier ist nämlich wegen (4) ist die erste Summe endlich, und für die zweite gilt

$$(2.14)\qquad \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} \frac{1}{n\lambda(n-1)} \sum_{\nu=1}^{m} 2^\nu \left(\sum_{k=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}} \varrho_k^2\right)^{1/2} \leqq$$

$$\leqq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda(2^m)} \sum_{\nu=1}^{m} 2^\nu \left(\sum_{k=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}} \varrho_k^2\right)^{1/2} \leqq \sum_{\nu=1}^{\infty} 2^\nu \left(\sum_{k=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}} \varrho_k^2\right)^{1/2} \sum_{m=\nu}^{\infty} \frac{1}{\lambda(2^m)}.$$

Nach (1. 11) und (2. 14) kann die Abschätzung (2. 13) folgenderweise fortgesetzt werden:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\lambda(n-1)}\left(\sum_{k=1}^{n}\varrho_k^2k^2\right)^{1/2}\leqq K_6+K_7\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{2^\nu}{\lambda(2^\nu)}\left(\sum_{k=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}}\varrho_k^2\right)^{1/2}\leqq$$

$$\leqq K_6+2K_7\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{n=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu}\frac{1}{\lambda(2^\nu)}\left(\sum_{k=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}}\varrho_k^2\right)^{1/2}\leqq$$

$$\leqq K_6+2K_7\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{n=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu}\frac{1}{\lambda(n)}E_n\leqq K_6+2K_7\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda(n)}E_n<\infty.$$

Daraus und aus (2. 12) folgt die Ungleichung

$$A(\lambda,f)\leqq K_8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda(n)}E_n<\infty,$$

was zu beweisen war.

Damit haben wir den Hauptsatz vollständig bewiesen.

Schriftenverzeichnis

[1] G. Alexits, Über den Einfluß der Struktur einer Funktion auf die Konvergenz fast überall ihrer Fourierreihe, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **4** (1953), 95–101.
[2] G. Alexits, Über die Konvergenz der Orthogonalpolynomentwicklungen, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **6** (1955), 1–4.
[3] G. Alexits und D. Králik, Über die Bedeutung der strukturellen Eigenschaften einer Funktion für die Konvergenz ihrer Orthogonalentwicklungen, *Acta Sci. Math.*, **18** (1957), 131–139.
[4] Н. К. Бари, *Тригонометрические ряды* (Москва, 1961).
[5] С. Н. Бернштейн, Об абсолютной сходимости тригонометрических рядов, *Сообщ. Харьковск. Матем. об-ва*, (2) **14** (1914), 139-144.
[6] J. P. Gram, Über die Entwicklung reeller Funktionen in Reihen Mittels der Methode der kleinsten Quadrate, *J. reine angew. Math.*, **94** (1883), 41–73.
[7] J. P. Kahane, Sur certaines classes de séries de Fourier absolument convergentes, *J. math pures et appl.*, **35** (1956), 249–259.
[8] L. Leindler, Über die absolute Summierbarkeit der Orthogonalreihen, *Acta Sci. Math.*, **22** (1961), 243–268.
[9] L. Leindler, Über unbedingte Konvergenz der Orthogonalreihen mit strukturellen Bedingungen, *Studia Math.*, **23** (1963), 113–117.
[10] Л. Лейндлер, О безусловной сходимости тригонометрических рядов, *Успехи мат. наук*, **19 1** (115) (1964), 167–168.
[11] J. Marcinkiewicz, Sur une nouvelle condition pour la convergence presque partout des séries de Fourier, *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa*, **8** (1939), 239–240.
[12] R. Paley–A. Zygmund, On some series of functions, *Proc. Cambr. Phil. Soc.*, **26** (1930), 337–357, 458–474 und **28** (1932), 190–205.
[13] A. Plessner, Über Konvergenz von trigonometrischen Reihen, *Journal f. reine u. angew. Math.*, **155** (1926), 15–25.
[14] R. Salem, On a theorem of Zygmund, *Duke Math. J.*, **10** (143), 23–31.
[15] R. Salem–A. Zygmund, Some properties of trigonometric series, whose terms have random sings, *Acta Math.*, **91** (1954), 245–301.
[16] С. Б. Стечкин, О теореме Колмогорова-Селиверстова, *Известия Акад. Наук СССР*, **17** (1953), 499-512.
[17] ——— Об абсолютной сходимости ортогональных рядов, *Успехи мат. наук*, **2** (1947), 177-178.

[18] O. Szász, On the absolute covergence of trigonometric series, *Annals of Math.*, **47** (1946), 213–220.
[19] K. Tandori, Über die orthogonalen Funktionen. IX (Absolute Summation), *Acta Sci. Math.*, **21** (1960), 292–299.
[20] П. Л. Ульянов, Обобщение теоремы Марцинкевича, *Известия Акад. Наук СССР*, **17** (1953), 513-524.
[21] ——— О некоторых эквивалентных условиях сходимости рядов и интегралов, *Успехи мат. наук*, **8:6 (58)** (1953), 133–141.
[22] N. Wiener, Tauberian theorems, *Annals of Math.*, **33** (1932), 1–100.
[23] A. Zygmund, Sur la convergence absolue des séries de Fourier, *J. London Math. Soc.*, **3** (1928), 194–196.

(Eingegangen am 28. September 1963)

Bestimmung aller nichtkonstanten Lösungen von linearen Funktionalgleichungen

Von LÁSZLÓ LOSONCZI in Debrecen

J. ACZÉL [1] hat das Problem der allgemeinen Lösung der Funktionalgleichung

$$f(ax+by+c) = pf(x)+qf(y)+r \tag{1}$$

aufgeworfen, wo keine der Konstanten a, b, p, q gleich Null ist, und x, y die Menge der reellen Zahlen durchläuft.

Über die nichttrivialen stetigen bzw. meßbaren, beschränkten Lösungen von (1) hat J. ACZÉL [2] bewiesen, daß diese nur im Falle $a=p, b=q$ existieren. Im Spezialfalle

$$f(ax+y) = pf(x)+f(y)$$

zeigte Z. DARÓCZY [3], daß eine nichtkonstante Lösung genau dann existiert, wenn a und p konjugierte algebraische Zahlen[1]), oder beide transzendent über R sind [2]) (oder, was dasselbe bedeutet, $R(a)$ mit $R(p)$ isomorph ist). In einer weiteren Arbeit [4] hat Z. DARÓCZY den folgenden Satz bewiesen:

Satz 1. *Die Funktionalgleichung* (1) *hat nur dann eine nichtkonstante Lösung, wenn es eine isomorphe Abbildung von $R(a, b)$ auf $R(p, q)$ gibt*[3]), *die die Elemente a, b in die Elemente p, q überführt, und im Falle $p+q = 1$, $c=0$ auch $r=0$ ist.*

In dieser Arbeit vereinfachen wir den Beweis dieses Satzes und geben sämtliche nichttriviale Lösungen der Funktionalgleichung (1) an. Für wertvolle Ratschläge möchte ich Herrn Prof. J. ACZÉL aufrichtig danken.

Bemerkung. Die Bedingung der Isomorphie von $R(a, b)$ und $R(p, q)$ kann — wie man leicht einsieht — auch so gefaßt werden: a und p sind beide transzendent über R oder beide algebraisch und konjugiert, dagegen sind b und q entweder beide transzendent über $R(a)$ bzw. $R(p)$ oder ist b algebraisch über $R(a)$ und zugleich q algebraisch über $R(p)$, so daß das zu q geordnete irreduzible Hauptpolynom in $R(p)$ dieselbe Gestalt hat wie das zu b geordnete irreduzible Hauptpolynom in $R(a)$, d. h. die Koeffizienten gehen im Sinne der zwischen $R(a)$ und $R(p)$ bestehenden Isomorphie ineinander über.

---

[1]) Die algebraischen Zahlen a, p nennen wir konjugiert, wenn $P_a(x)=P_p(x)$ ist, wo $P_a(x)$, $P_p(x)$ die den Zahlen a, p eindeutig zugeordneten irreduziblen Hauptpolynome sind.

[2]) R bedeutet den Körper der rationalen Zahlen.

[3]) $R(a, b)$ bedeutet den Erweiterungskörper von R durch die Elemente a, b.

Hilfssatz 1. *Genügt die Funktion $f(x)$ der Gleichung* (1), *so genügt die Funktion* $g(x)=f(x)-f(0)$ *der Cauchyschen Grundgleichung*

$$g(u+v)=g(u)+g(v) \tag{2}$$

und den Gleichungen

$$g(a^k x)=p^k g(x), \quad g(b^k x)=q^k g(x) \qquad (k=1,2,3,\ldots). \tag{3}$$

Zum Beweis setzen wir in (1) der Reihe nach $x=\frac{u}{a}$, $y=\frac{v-c}{b}$; $x=\frac{u}{a}$, $y=-\frac{c}{b}$; $x=0$, $y=\frac{v-c}{b}$; $x=0$, $y=-\frac{c}{b}$ ein, und erhalten nacheinander

$$f(u+v)=pf\left(\frac{u}{a}\right)+qf\left(\frac{v-c}{b}\right)+r, \quad f(u)=pf\left(\frac{u}{a}\right)+qf\left(-\frac{c}{b}\right)+r,$$

$$f(v)=pf(0)+qf\left(\frac{v-c}{b}\right)+r, \quad f(0)=pf(0)+qf\left(-\frac{c}{b}\right)+r,$$

woraus $f(u+v)=f(u)+f(v)-f(0)$ folgt. Damit haben wir (2) bewiesen.

Durch die Substitutionen $y=-\frac{c}{b}$; $x=0$, $y=-\frac{c}{b}$ ergeben sich aus (1)

$$f(ax)=pf(x)+qf\left(-\frac{c}{b}\right)+r, \tag{4}$$

$$f(0)=pf(0)+qf\left(-\frac{c}{b}\right)+r. \tag{5}$$

Subtrahieren wir (5) von (4), so erhalten wir die erste der Gleichungen (3) im Falle $k=1$. Den Beweis kann man leicht fortsetzen mit vollständiger Induktion (s. [3]). Der Beweis der zweiten Gleichung (3) verläuft analog.

Hilfssatz 2. *Befriedigt die Funktion $f(x)$ die Funktionalgleichung* (1), *so besteht die Gleichung*

$$g\big(F(a,b)x\big)=F(p,q)g(x) \tag{6}$$

für beliebige, an den Stellen (a,b), (p,q) erklärte gebrochene rationale Funktionen $F(x,y)=\dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ $\big(Q(a,b)\neq 0,\ Q(p,q)\neq 0\big)$ *mit rationalen Koeffizienten.*

Wir zeigen erstens, daß

$$g\big(P(a,b)x\big)=P(p,q)g(x) \tag{7}$$

gilt, wo $P(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} r_{ij}x^i y^j$ ein beliebiges Polynom mit rationalen Koeffizienten ist. Es ist nämlich wegen (2), (3) [4])

$$g(P(a,b)x) = g\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} r_{ij}a^i b^j x\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} g(r_{ij}a^i b^j x) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} r_{ij}p^i q^j g(x) = P(p,q)g(x).$$

Daraus folgt schon (6), weil

$$P(p,q)g(x) = g(P(a,b)x) = g\left(Q(a,b)\frac{P(a,b)}{Q(a,b)}x\right) = Q(p,q)g\left(\frac{P(a,b)}{Q(a,b)}x\right),$$

d. h.

$$g\left(\frac{P(a,b)}{Q(a,b)}x\right) = \frac{P(p,q)}{Q(p,q)}g(x)$$

ist, was zu beweisen war.

Bemerkung. Wenn $f(x)$ nichtkonstant ist, so ist es hinreichend im Hilfssatz 2 zu verlangen, daß $Q(a,b)\neq 0$ (oder $Q(p,q)\neq 0$).

Es ist nämlich nach (7)

$$g(Q(a,b)x) = Q(p,q)g(x)$$

und aus $Q(a,b)=0$ (bzw. $Q(p,q)=0$) folgt $Q(p,q)=0$ (bzw. $Q(a,b)=0$), da $g(x)$ nichtkonstant ist. Deshalb folgt aus $Q(a,b)\neq 0$ (bzw. $Q(p,q)\neq 0$) $Q(p,q)\neq 0$ (bzw. $Q(a,b\neq 0)$, w. z. b. w.

Beweis des Satzes 1. Wir setzen voraus, daß die Funktionalgleichung (1) eine nichtkonstante Lösung hat. Die Abbildung

$$\varphi(F(a,b)) = F(p,q) \tag{8}$$

bildet (wegen $R(a,b)=\{F(a,b)\}$, $R(p,q)=\{F(p,q)\}$) $R(a,b)$ auf $R(p,q)$ ab. Wir zeigen, daß die Abbildung φ ein Isomorphismus von $R(a,b)$ auf $R(p,q)$ ist.

Die Abbildung (8) erhält die Addition und die Multiplikation. Aus

$$\varphi(F_1(a,b)) = F_1(p,q);\quad \varphi(F_2(a,\mathrm{b})) = F_2(p,q),\quad F_1(x,y)\circ F_2(x,y) = F(x,y)$$

folgt nämlich

$$\varphi(F_1(a,b)\circ F_2(a,b)) = \varphi(F(a,b)) = F(p,q) = F_1(p,q)\circ F_2(p,q) = \varphi(F_1(a,b))\circ$$
$$\circ\,\varphi(F_2(a,b)),$$

wobei die Operation $\circ$ die Addition bzw. die Multiplikation bedeutet.

Die Abbildung φ ist eineindeutig. Dazu genügt es zu zeigen, daß $F_1(p,q) = F_2(p,q)$ dann und nur dann, wenn $F_1(a,b)=F_2(a,b)$. Ist $F_1(a,b)=F_2(a,b)$, so gilt nach (6)

$$F_1(p,q)g(x) = g(F_1(a,b)x) = g(F_2(a,b)x) = F_2(p,q)g(x).$$

---

[4]) Wenn die Funktion $g(x)$ der Gleichung (2) genügt, so gilt

$$g\left(\sum_{i=1}^{n} r_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} r_i g(x_i) \quad \text{mit} \quad r_i\in R.$$

d. h.

$$(F_1(p, q) - F_2(p, q))g(x) = 0.$$

Weil $g(x)$ nicht identisch Null ist, folgt hieraus $F_1(p, q) = F_2(p, q)$. Andererseits, wenn $F_1(p, q) = F_2(p, q)$ ist, dann gilt wieder nach (6)

$$g(F_1(a, b)x) = F_1(p, q)g(x) = F_2(p, q)g(x) = g(F_2(a, b)x),$$

d. h.

$$g[(F_1(a, b) - F_2(a, b))x] = 0.$$

Da $g(x)$ nichtkonstant ist, muß $F_1(a, b) - F_2(a, b) = 0$, d. h. $F_1(a, b) = F_2(a, b)$ gelten. Die Abbildung (8) ist also ein Isomorphismus von $R(a, b)$ auf $R(p, q)$. Man sieht, daß $\varphi(a) = p$ und $\varphi(b) = q$. Ist $p + q = 1$, $c = 0$, so folgt mit $x = y = 0$ aus (1), daß $r = 0$ sein muß. Damit haben wir den Satz 1 vollständig bewiesen.

Satz 2. *Wenn es eine isomorphe Abbildung φ von $R(a, b)$ auf $R(p, q)$ gibt, die die Elemente a, b in die Elemente p, q überführt, und im Falle $p + q = 1$, $c = 0$ auch $r = 0$ gilt, dann hat die Funktionagleichung (1) nichttriviale Lösungen und sämtliche nichtkonstante Lösungen haben die Gestalt*

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{s} \varphi(R_\nu)(f(h_\nu) - f(0)) + f(0), \tag{9}$$

wobei $H = \{h_\nu\}$ eine Basis der reellen Zahlen über $R(a, b)$ und

$$x = \sum_{\nu=1}^{s} R_\nu h_\nu \quad R_\nu \in R(a, b), \; h_\nu \in H \tag{10}$$

ist, ferner $f(h_\nu), f(0)$ beliebige reelle Zahlen mit der Beschränkung

$$f(c) = (p + q) f(0) + r \tag{11}$$

bedeuten.

Beweis. Erstens zeigen wir, daß alle Lösungen von (1) die Gestalt (9) haben. Wegen [5]) $\varphi(r) = r$ $(r \in R)$, $\varphi(a) = p$, $\varphi(b) = q$ ist

$$\varphi(F(a, b)) = F(p, q),$$

da der Isomorphismus φ die Addition und die Multiplikation erhält. So läßt sich (7) im Hilfssatz 2 folgendermaßen schreiben:

$$g(Sx) = \varphi(S) g(x), \tag{12}$$

wobei $S \in R(a, b)$ ist. Es sei $H = \{h_\nu\}$ eine Basis der reellen Zahlen über $R(a, b)$. Wir wissen, daß eine beliebige reelle Zahl x sich in der Gestalt

$$x = \sum_{\nu=1}^{s} R_\nu h_\nu \quad (R_\nu \in R(a, b), \; h_\nu \in H) \tag{10}$$

---

[5]) Da R gemeinsamer Primkörper der Körper $R(a, b)$ und $R(p, q)$ ist, gilt $\varphi(r) = r$ für jedes Element $r \in R$. (Vgl. L. Rédei [5].)

eindeutig aufschreiben läßt. Beachten wir die Gleichungen (2), (12), so erhalten wir

$$f(x)-f(0) = \sum_{\nu=1}^{s} \varphi(R_\nu)\big(f(h_\nu)-f(0)\big),$$

womit die Formel (9) bewiesen ist.

Jetzt beweisen wir noch, daß die Funktionen der Gestalt (9) die Gleichung (1) dann und nur dann erfüllen, wenn (11) besteht. Wir setzen die Funktion (9) in die Gleichung (1) ein. Wenn

$$y = \sum_{\nu=1}^{s} T_\nu h_\nu, \quad c = \sum_{\nu=1}^{s} Q_\nu h_\nu \qquad (T_\nu, Q_\nu \in R(a, b)),$$

dann ist

$$ax+by+c = \sum_{\nu=1}^{s} (aR_\nu + bT_\nu + Q_\nu)h_\nu \quad aR_\nu + bT_\nu + Q_\nu \in R(a, b),$$

also gilt

$$f(ax+by+c)-pf(x)-qf(y)-r = \sum_{\nu=1}^{s} \varphi(aR_\nu+bT_\nu+Q_\nu)\big(f(h_\nu)-f(0)\big)+f(0)-$$
$$-p\sum_{\nu=1}^{s}\varphi(R_\nu)\big(f(h_\nu)-f(0)\big)-pf(0)-q\sum_{\nu=1}^{s}\varphi(T_\nu)\big(f(h_\nu)-f(0)\big)-qf(0)-r.$$

Wenn wir berücksichtigen, daß φ ein Isomorphismus ist, mit $\varphi(a)=p$ und $\varphi(b)=q$, so erhalten wir

$$f(ax+by+c)-pf(x)+qf(y)-r = \sum_{\nu=1}^{s} \varphi(Q_\nu)\big(f(h_\nu)-f(0)\big)+f(0)-(p+q)f(0)-r,$$

d. h. wegen (9)

$$f(ax+by+c)-pf(x)-qf(y)-r = f(c)-(p+q)f(0)-r.$$

Daher sehen wir, daß die durch die Gleichung (9) definierte Funktion dann und nur dann der Funktionalgleichung (1) genügt, wenn

$$f(c) = (p+q)f(0)+r \tag{11}$$

gilt.

Die Bedingung (11) kann immer erfüllt werden, außer wenn $p+q = 1$, $c=0$ ist, denn dann geht (11) in $f(0) = f(0)+r$ über. Damit (11) in diesem Fall bestehe, muß also $r=0$ sein.

Literatur

[1] J. Aczél, Quelques problèmes non résolus dans la théorie des équations fonctionnelles, *Matematička biblioteka*, Beograd, **25** (1963), 149–152.

[2] J. Aczél, Über eine Klasse von Funktionalgleichungen, *Commentarii Math. Helv.*, **21** (1948), 247–256.

[3] Z. Daróczy, Notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz von nichtkonstanten Lösungen linearer Funktionalgleichungen, *Acta Sci. Math.*, **22** (1961), 31–41.

[4] Z. Daróczy, A bilineáris függvényegyenletek egy osztályáról, *Mat. Lapok* **15** (1964), 52-86.

[5] L. Rédei, *Algebra*. I (Budapest, 1954).

(Eingegangen am 30. September 1963)

On an interpolation theorem of Foiaş and Lions

By J. PEETRE in Lund (Sweden)

Introduction

Let X be a locally compact space provided with a positive measure μ. We denote by $L_\zeta^p(E)$, where $1 \leqq p \leqq \infty$ and ζ is *a* positive μ-measurable function and E a Banach space (or, more generally, a field of Banach spaces over X; we do not consider this generalization here in order not to complicate the notation), the space of μ-measurable functions a with values in E such that $\|\zeta a\|_E$ is of μ-integrable p th power (if $p < \infty$) or μ-bounded (if $p = \infty$). We provide $L_\zeta^p(E)$ with the norm

$$\|a\|_{L_\zeta^p(E)} = \begin{cases} \left(\int\limits_X \|\zeta a\|_E^p \, d\mu\right)^{1/p} & (\text{if } p < \infty) \\ \mu\text{-}\sup\limits_X \|\zeta a\|_E & (\text{if } p = \infty). \end{cases} \tag{1}$$

A function $H(z_0, z_1)$ defined, measurable and positive for $z_0 \geqq 0$, $z_1 \geqq 0$ is said to be an *interpolation function of power p* if and only if whenever π is a linear mapping from some space, containing $L_{\zeta_0}^p(E)$ and $L_{\zeta_1}^p(E)$ as linear subspaces, into itself such that the restriction of π to $L_{\zeta_i}(E)$ maps $L_{\zeta_i}^p(E)$ continuously into itself ($i = 0, 1$) then the restriction of π to $L_{H(\zeta_0, \zeta_1)}^p(E)$ maps $L_{H(\zeta_0, \zeta_1)}^p(E)$ continuously into itself. E. g. $z_0^{1-\theta} z_1^\theta$ with $0 < \theta < 1$ is an interpolation function of power p for any p (see example 2). In [1] FOIAŞ and LIONS found a sufficient condition for a function to be an interpolation function of power p (in the above terminology). In the present note we give two constructions of interpolation functions of power p. in a sense dual to each other The first of these constructions leads to a condition essentially the one of FOIAŞ and LIONS (see remark 2) while the second leads to a condition in a sense dual to the first one. It is also shown that under some auxiliary restrictions both constructions are equivalent. In particular this leads to a simple condition which is independent of p (see theorem 4).

The general ideas underlying these results were briefly discussed in [2] (cf. also [3]).

§ 1

Let us set

$$J(t, a) = (\|a\|^p_{L^p_{\xi_0}(E)} + t^p \|a\|^p_{L^p_{\xi_1}(E)})^{1/p}, \quad a \in L^p_{\xi_0}(E) \cap L^p_{\xi_1}(E), \quad 0 < t < \infty, \tag{2}$$

and

$$K(t, a) = \inf_{a = a_0 + a_1} (\|a_0\|^p_{L^p_{\xi_0}(E)} + t^p \|a_1\|^p_{L^p_{\xi_1}(E)})^{1/p}, \quad a \in L^p_{\xi_0}(E) + L^p_{\xi_1}(E), \quad 0 < t < \infty. \tag{3}$$

Let $\alpha = \alpha(t)$ and $\beta = \beta(t)$ $(0 < t < \infty)$ be two positive functions measurable with respect to dt/t.

We denote by S_α the space of elements $a \in L^p_{\xi_0}(E) + L^p_{\xi_1}(E)$ such that there exists a function $u = u(t)$ $(0 < t < \infty)$ measurable with respect to dt/t with values in $L^p_{\xi_0}(E) \cap \cap L^p_{\xi_1}(E)$ such that

$$a = \int_0^\infty u(t) \frac{dt}{t} \,(\text{in } L^p_{\xi_0}(E) + L^p_{\xi_1}(E)), \quad \alpha(t) J(t, u(t)) \in L^p_*, \tag{4}$$

and by T_β the space of elements $a \in L^p_{\xi_0}(E) + L^p_{\xi_1}(E)$ such that

$$\beta(t) K(t, a) \in L^p_*. \tag{5}$$

(L^p_* denotes L^p with respect to the measure dt/t.) We provide S_α with the norm

$$\|a\|_{S_\alpha} = \inf \|\alpha(t) J(t, u(t))\|_{L^p_*}, \quad a = \int_0^\infty u(t) \frac{dt}{t} \tag{6}$$

and T_β with the norm

$$\|a\|_{T_\beta} = \|\beta(t) K(t, a)\|_{L^p_*}. \tag{7}$$

Theorem 1. *Each of the spaces S_α and T_β is an interpolation space with respect to $L^p_{\xi_0}(E)$ and $L^p_{\xi_1}(E)$; i. e. whenever π is a linear mapping from some space, containing $L^p_{\xi_0}(E)$ and $L^p_{\xi_1}(E)$ as linear subspaces, into itself such that the restriction of π to $L^p_{\xi_i}(E)$ maps $L^p_{\xi_i}(E)$ continuously into itself $(i = 0, 1)$ then the restriction of π to S_α or T_β maps S_α or T_β continuously into itself. Moreover, if*

$$\|\pi a\|_{L^p_{\xi_i}(E)} \leqq M_i \|a\|_{L^p_{\xi_i}(E)}, \quad a \in L^p_{\xi_i}(E) \qquad (i = 0, 1), \tag{8}$$

where M_0 and M_1 are positive constants, then

$$\|\pi a\| \leqq M \,\|a\|, \quad a \in S_\alpha \text{ or } T_\beta \tag{9}$$

with $\| \; \| = \| \; \|_{S_\alpha}$ or $\| \; \|_{T_\beta}$, where M is a constant that depends only upon M_0 and M_1.

Proof. i) We have

$$J(t, \pi a) \leqq (M_0^p \|a\|^p_{L^p_{\xi_0}(E)} + t^p M_1^p \|a\|^p_{L^p_{\xi_1}(E)})^{1/p} \leqq \max(M_0, M_1) J(t, a).$$

Since

$$\pi a = \int_0^\infty \pi u(t) \frac{dt}{t}$$

we therefore get

$$\|\pi a\|_{S_\alpha} \leqq \max(M_0, M_1)\|\alpha(t)J(t, u(t))\|_{L_*^p}$$

and, by making vary u, (9) follows in this case, with $M=\max(M_0, M_1)$.

ii) We have

$$K(t, \pi a) \leqq (M_0^p\|a_0\|^p_{L^p_{\xi_0}(E)} + t^p M_1^p\|a_1\|^p_{L^p_{\xi_1}(E)})^{1/p}.$$

Making vary a_0 and a_1 we get

$$K(t, \pi a) \leqq \max(M_0, M_1)\, K(t, a).$$

Therefore (9) follows in this case, again with $M=\max(M_0, M_1)$.

Remark 1. If α and β satisfy inequalities of the form

$$(10)\qquad \alpha(st) \leqq \varrho(s)\alpha(t), \quad \beta(st) \leqq \sigma(s)\beta(t)$$

we may replace $M=\max(M_0, M_1)$ by $M=M_0\varrho\left(\frac{M_0}{M_1}\right)$ $M=M_0\sigma\left(\frac{M_0}{M_1}\right)$ (cf. [3]).

In particular if $\varrho(s)=\sigma(s)=s^{-\theta}$ we get $M=M_0^{1-\theta}M_1^\theta$.

Theorem 2. *We have* $S_\alpha = L^p_{F(\zeta_0,\zeta_1)}(E)$ *and* $T_\beta = L^p_{G(\zeta_0,\zeta_1)}(E)$ *with equality of norms, where* $\left(\frac{1}{q}=1-\frac{1}{p}\right)$

$$(11)\qquad F(z_0, z_1) = \left(\int_0^\infty (z_0^p + t^p z_1^p)^{-(q/p)}(\alpha(t))^{-q}\frac{dt}{t}\right)^{-(1/q)}$$

and

$$(12)\qquad G(z_0, z_1) = \left(\int_0^\infty (z_0^{-q} + t^{-q} z_1^{-q})^{-(p/q)}(\beta(t))^p\frac{dt}{t}\right)^{1/p}.$$

Example 1. If $\alpha(t)=\beta(t)=t^{-\theta}$ $(0<\theta<1)$ we get $F(z_0, z_1)=cz_0^{1-\theta}z_1^\theta$, $G(z_0, z_1)=dz_0^{1-\theta}z_1$ where c and d are constants.

Proof. i) We have to minimalize the expression

$$\mathfrak{J}_u = \int_0^\infty (\|u(t)\|^p_{L^p_{\xi_0}(E)} + t^p\|u(t)\|^p_{L^p_{\xi_1}(E)})(\alpha(t))^p\frac{dt}{t} =$$

$$= \int_0^\infty\int_X (\zeta_0^p + t^p\zeta_1^p)\|u(t)\|_E^p\, d\mu'(\alpha(t))^p\frac{dt}{t}$$

where $a=\int_0^\infty u(t)\,dt/t$. We claim that it is sufficient to consider $u(t)$ of the form $\varphi(t)a$ with $\int_0^\infty \varphi(t)\,dt/t=1$, $\varphi(t)\geqq 0$. Indeed given any $u(t)$ let us set

$$\varphi(t) = \frac{\|u(t)\|_E}{\int_0^\infty \|u(t)\|_E\, dt/t}.$$

Then $\int\limits_0^\infty \varphi(t)\,dt/t = 1$, $\varphi(t) \geqq 0$ and moreover $\|\varphi(t)a\|_E \leqq \|u(t)\|_E$ so that $\mathfrak{J}_{\varphi a} \leqq \mathfrak{J}_u$, which proves the assertion. Thus restricting ourselves to the case $u(t) = \varphi(t)a$ we obtain after a change of the order of integration

$$\mathfrak{J}_u = \int\limits_X \int\limits_0^\infty (\varphi(t))^p (\zeta_0^p + t^p \zeta_1^p)(\alpha(t))^p \frac{dt}{t} \|a\|_E^p \, d\mu.$$

The problem is now reduced to minimizing (for each $x \in X$) the expression

$$\mathscr{E}_\varphi = \int\limits_0^\infty (\varphi(t))^p (\zeta_0^p + t^p \zeta_1^p)(\alpha(t))^p \frac{dt}{t}$$

where $\int\limits_0^\infty \varphi(t)\,dt/t = 1$, $\varphi(t) \geqq 0$. Choose

$$\varphi(t) = (F(\zeta_0, \zeta_1))^q (\zeta_0^p + t^p \zeta_1^p)^{-(q/p)} (\alpha(t))^{-q};$$

then

$$\mathscr{E}_\varphi = \int\limits_0^\infty (F(\zeta_0, \zeta_1))^{qp} (\zeta_0^p + k^p \zeta_1^p)^{1-q} (\alpha(t))^{-qp+p} \frac{dt}{t} = (F(\zeta_0, \zeta_1))^{qp-q} = (F(\zeta_0, \zeta_1))^p$$

so that

$$\min \mathscr{E}_\varphi \leqq (F(\zeta_0, \zeta_1))^p.$$

On the other hand, using HÖLDER's inequality

$$(F(\zeta_0, \zeta_1))^p = (F(\zeta_0, \zeta_1))^p \left(\int\limits_0^\infty \varphi(t)(\zeta_0^p + t^p \zeta_1^p)^{1/p} \alpha(t)(\zeta_0^p + t^p \zeta_1^p)^{-(1/p)} (\alpha(t))^{-1} \frac{dt}{t} \right)^p \leqq$$

$$\leqq (F(\zeta_0, \zeta_1))^p \int\limits_0^\infty (\varphi(t))^p (\zeta_0^p + t^p \zeta_1^p)(\alpha(t))^p \frac{dt}{t} (F(\zeta_0, \zeta_1))^{-p} = \mathscr{E}_\varphi,$$

which finishes the proof.

ii) We have to minimize the expression

$$\mathfrak{K}_{v_0, v_1} = \int\limits_0^\infty (\|v_0(t)\|^p_{L^p_{\zeta_0}(E)} + t^p \|v_1(t)\|^p_{L^p_{\zeta_1}(E)})(\beta(t))^p \frac{dt}{t} =$$

$$= \int\limits_0^\infty \int\limits_X (\zeta_0^p \|v_0(t)\|_E^p + t^p \zeta_1^p \|v_1(t)\|_E^p)\, d\mu (\beta(t))^p \frac{dt}{t}$$

where $a = v_0(t) + v_1(t)$. We claim that it is sufficient to consider $v_0(t)$ and $v_1(t)$ of the form $\psi_0(t)a$ and $\psi_1(t)a$ with $\psi_0(t) + \psi_1(t) = 1$, $\psi_0(t) \geqq 0$, $\psi_1(t) \geqq 0$. Indeed given $v_0(t)$ and $v_1(t)$ let us set

$$\psi_0(t) = \frac{\|v_0(t)\|_E}{\|v_0(t)\|_E + \|v_1(t)\|_E}, \quad \psi_1(t) = \frac{\|v_1(t)\|_E}{\|v_0(t)\|_E + \|v_1(t)\|_E}.$$

Then $\psi_0(t)+\psi_1(t) = 1, \psi_0(t)\geqq 0, \psi_1(t)\geqq 0$ and moreover $\|\psi_0(t)a\|_E \leqq \|v_0(t)\|_E$, $\|\psi_1(t)a\|_E \leqq \|v_1(t)\|_E$ so that $\mathcal{K}_{\psi_0 a, \psi_1 a} \leqq \mathcal{K}_{v_0, v_1}$ which proves the assertion. Thus restricting ourselves to the case $v_0(t)=\psi_0(t)a$ and $v_1(t)=\psi_1(t)a$ we obtain after a change of the order of integration

$$\mathcal{K}_{v_0, v_1} = \int_X \int_0^\infty ((\psi_0(t))^p \zeta_0^p + (\psi_1(t))^p t^p \zeta_1^p)(\beta(t))^p \frac{dt}{t} \|a\|_E^p \, d\mu.$$

The problem is now reduced to minimizing (for each $x \in X$) the expression

$$\int_0^\infty ((\psi_0(t))^p \zeta_0^p + (\psi_1(t))^p t^p \zeta_1^p)(\beta(t))^p \frac{dt}{t}$$

where $\psi_0(t)+\psi_1(t) = 1, \psi_0(t)\geqq 0, \psi_1(t)\geqq 0$ from which the result in this case (see (12)) easily follows as in the preceding case. Combining theorem 1 and theorem 2 we get

Theorem 3. *Each of the functions* $F(z_0, z_1)$ *and* $G(z_0, z_1)$ *as defined by* (11) *and* (12) *is an interpolation function of power* p.

Example 2. By example 1, $z_0^{1-\theta} z_1^\theta$ with $0<\theta<1$ is thus an interpolation function of power p for any p. This leads to the interpolation theorem of Stein and Weiss [4].

Remark 2. It is easily seen that the condition provided by (11) is essentially the one found by Foiaş and Lions [1]. The only significant difference is that these authors allow $(\alpha(t)^{-q} dt/t$ to be replaced by an arbitrary positive measure $d\xi$ (not necessarily absolutely continuous with respect to dt/t). It should be possible to extend our approach to cover this generalization too.

§ 2.

We conclude by pointing out some relations between the functions $F(z_0, z_1)$ and $G(z_0, z_1)$. Since they are both homogeneous of degree 1 it suffices to consider the functions $f(z)=F(z, 1)$ and $g(z)=G(z, 1)$. We have then after a change of variable

(13) $$f(z) = z\left(\int_0^\infty (1+t^p)^{-(q/p)}(\alpha(tz))^{-q} \frac{dt}{t}\right)^{-(1/q)}$$

and

(14) $$g(z) = z\left(\int_0^\infty (1+t^{-q})^{-(p/q)}(\beta(tz))^p \frac{dt}{t}\right)^{1/p}.$$

Let us consider the special case $\alpha(t)=\beta(t)$. By Hölder's inequality we obtain

$$\int_0^\infty (1+t^p)^{-(1/p)}(1+t^{-q})^{-(1/q)} \frac{dt}{t} \leqq \frac{g(z)}{f(z)}$$

or

(15) $$f(z) \leqq C g(z)$$

where C is a constant, $0<C<\infty$. Assume next that α satisfies (10) where

(16) $$\int_0^\infty (1+t^p)^{-(q/p)}\left(\varrho\left(\frac{1}{t}\right)\right)^q \frac{dt}{t}<\infty.$$

Then we get

$$\int_0^\infty (1+t^p)^{-(q/p)}(\alpha(tz))^{-q}\frac{dt}{t}\leqq \int_0^\infty (1+t^p)^{-(q/p}\left(\varrho\left(\frac{1}{t}\right)\right)^q \frac{dt}{t}(\alpha(z))^{-q}$$

so that

(17) $$Az\alpha(z)\leqq f(z)$$

where A is a constant, $0<A<\infty$. Assume again that β satisfies (10) where

(18) $$\int_0^\infty (1+t^{-q})^{-(p/q)}(\sigma(t))^p\frac{dt}{t}<\infty.$$

Then we get

$$\int_0^\infty (1+t^{-q})^{-(p/q)}(\beta(tz))^p\frac{dt}{t}\leqq \int_0^\infty (1+t^{-q})^{-(p/q)}(\sigma(t))^p\frac{dt}{t}(\beta(z))^p$$

so that

(19) $$g(z)\leqq Bz\beta(z)$$

where B is a constant, $0<B<\infty$. Therefore in the special case $\alpha(t)=\beta(t)$, $\varrho(t)=$ $=\sigma(t)$ assuming also (16) and (18) we get by (15)

(20) $$Az\alpha(z)\leqq f(z)\leqq Cg(z)\leqq CBz\beta(z).$$

(Note that $A\leqq CB$!) In other words the functions $f(z)$, $g(z)$ and $z\alpha(z)$ are here equivalent.

Finally we make a few observations concerning the conditions (16) and (18). We note that, since all functions of the form $(1+t^p)^{1/p}$ are equivalent, they may be replaced by the conditions

(21) $$\int_0^\infty \left(\min\left\{1,\frac{1}{t}\right\}\varrho\left(\frac{1}{t}\right)\right)^q\frac{dt}{t}<\infty$$

and, after a change of variable,

(22) $$\int_0^\infty \left(\min\left\{1,\frac{1}{t}\right\}\sigma\left(\frac{1}{t}\right)\right)^p\frac{dt}{t}<\infty.$$

We note also that in view of Hölder's inequality if one of these conditions holds for two different values of the parameter, p or q, than it holds for all intermediate values.

We may sum up these results as follows.

Theorem 4. *Assume that* $\alpha(t)$ *satisfies* (10) *where*

$$\int_0^\infty \min\left\{1, \frac{1}{t}\right\} \varrho\left(\frac{1}{t}\right) \frac{dt}{t} < \infty, \quad \sup_t \min\left\{1, \frac{1}{t}\right\} \varrho\left(\frac{1}{t}\right) < \infty. \tag{23}$$

Then $z_0\alpha(z_0/z_1)$ *is equivalent to an interpolation function of power* p *for any* p.

Remark 3. Conditions of the type (23) arose in a similar context in [3].

References

[1] C. Foiaş and J. L. Lions, Sur certains théorèmes d'interpolation, *Acta Sci. Math.*, **22** (1961), 269—282.

[2] J. Peetre, Nouvelles propriétés d'espaces d'interpolation, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **256** (1963), 1424—1426.

[3] J. Peetre, *A theory of interpolation of normed spaces.* Notes, Universidade de Brasília, 1963.

[4] E. Stein and G. Weiss, Interpolation of operators with change of measures, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **87** (1958), 159—172.

(Received August 20, 1963)

On the numerical range of normal operators

By E. DURSZT in Szeged

The *numerical range* of a (linear, bounded) operator T in Hilbert space $\mathfrak{H}$ is defined as to be the set

$$W(T) = \{(T\varphi, \varphi) : \varphi \in \mathfrak{H}, \|\varphi\| = 1\}.$$

Theorem 1 below gives a characterisation of the set $W(T)$ in case T is a normal operator. Using this characterisation, we shall be able to give, in Theorem 2, a negative answer, even for normal contractions[1]), to the following question of HALMOS [1]: Is the numerical range of each contraction the intersection of the numerical ranges of its unitary dilations[2])?

We shall denote by $\sigma(T)$, $\sigma_p(T)$, and $\sigma_c(T)$ the spectrum, the point spectrum, and the continuous spectrum, respectively, of a normal operator T. I denotes the identity operator and O the zero operator; z denotes a complex variable; $\{z_0\}$ is the set consisting of the single complex number z_0.

Moreover, we shall use the following notations: For any set Λ of points in the complex plane, $(\Lambda)^0$ is the set of the inner points of Λ, $\overline{\Lambda}$ is the closure of Λ, and $[\Lambda]^{\text{conv}}$ the (non necessarily closed) convex hull of Λ.

We start with the following

Lemma. *If Λ is a convex set in the complex plane and μ is a non-negative Borel measure defined on Λ such that $\mu(\Lambda) = 1$, then*

$$\int_\Lambda z\,d\mu \in \Lambda.$$

This is an obvious consequence of the theorem proved in [2].

Using this lemma we shall prove our

Theorem 1. *Let E_T be the spectral measure corresponding to the normal operator T, and let S be the family of all the convex Borelian sets s in the complex plane, for which $E_T(s) = I$. Then*

$$W(T) = \bigcap_{s \in S} s.$$

---

[1]) An operator T is called a *contraction* if $\|T\| \leqq 1$.

[2]) The operator T' in a space $\mathfrak{H}' \supset \mathfrak{H}$ is called a *dilation* of T, if $(T'\varphi_1, \varphi_2) = (T\varphi_1, \varphi_2)$ for every $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathfrak{H}$. It follows that $W(T') \supset W(T)$.

Proof. Denote the intersection of all the $s \in S$ by $V(T)$. Consider a point $z_0 \in W(T)$, and a set $s \in S$. Then there exists a $\varphi \in \mathfrak{H}, \|\varphi\| = 1$, such that

$$z_0 = (T\varphi, \varphi) = \int_s z d(E_T \varphi, \varphi) = \int_s z d\|E_T \varphi\|^2, \quad \int_s d\|E_T \varphi\|^2 = \|\varphi\|^2 = 1;$$

consequently, by the lemma, $z_0 \in S$. This proves that

$$W(T) \subset V(T). \tag{1}$$

In order to prove the converse inclusion, we note first that[3])

$$[\sigma(T)]^{\text{conv}} \subset \overline{W(T)}. \tag{2}$$

Indeed, let $z_0 \in \sigma(t)$ and d an arbitrary disc with the centre z_0. If φ is an element of the spectral subspace corresponding to d, $\|\varphi\| = 1$, then

$$(T\varphi, \varphi) = \int_d z d(E_T \varphi, \varphi) = \int_d z d\|E_T \varphi\|^2, \quad \int_d d\|E_T \varphi\|^2 = \|\varphi\|^2 = 1,$$

thus, by the lemma, we have $(T\varphi, \varphi) \in d$. This implies that z_0 is either an element, or an accumulation point of $W(T)$; consequently $\sigma(T) \subset \overline{W(T)}$. Since $W(T)$ is convex[4]), $[\sigma(T)]^{\text{conv}} \subset \overline{W(T)}$ also.

Now let us consider a point $z_0 \in V(T)$. Since we have always $E_T(\sigma(T)) = I$ and *a fortiori* $E_T([\sigma(T)]^{\text{conv}}) = I$,thus $[\sigma(T)]^{\text{conv}}$ belongs to S. Consequently $z_0 \in [\sigma(T)]^{\text{conv}}$; hence, by (2),

$$z_0 \in \overline{W(T)}. \tag{3}$$

We shall show that even $z_0 \in W(T)$. To do this, we have to distinguish several cases.

If $z_0 \in ([\sigma(T)]^{\text{conv}})^0$ then, by (2), $z_0 \in (\overline{W(T)})^0$. Since $W(T)$ is convex, this implies that $z_0 \in W(T)$.

If z_0 is an extreme point[5]) of $[\sigma(T)]^{\text{conv}}$ then $[\sigma(T)]^{\text{conv}} - \{z_0\}$ also is convex, but does not belong to S, since it does not contain the point z_0, which, by hypothesis, belongs to every set in S. Thus $E_T(\{z_0\}) \neq O$, i. e. z_0 is a proper value of T, and so it necessarily belongs to $W(T)$.

It remains, by (3), to consider the case when z_0 is a point on the boundary of $[\sigma(T)]^{\text{conv}}$ without being an extreme point. If $E_T(\{z_0\}) \neq O$, then z_0 is a proper value of T, thus $z_0 \in W(T)$. If $E_T(\{z_0\}) = O$, then consider the intersection e of the set $[\sigma(T)]^{\text{conv}}$ with its unique line of support through z_0. Deleting z_0 from e, we get two intervals, say e_1 and e_2. We have $E_T(e_i) \neq O$ $(i = 1, 2)$. Indeed: $E_T(e_1) = O$ would imply $E_T(e_1 \cup \{z_0\}) = O$, hence the set $\sigma_1 = \sigma(T) - (e_1 \cup \{z_0\})$ also would have E_T-measure I, and, since σ_1 is obviously convex, it would belong to S. Now, this is impossible, since z_0 does not belong to σ_1, although z_0 is, by hypothesis,

---

[3]) $[\sigma(T)]^{\text{conv}} = \overline{W(T)}$ holds also. See [3], p. 321.

[4]) The numerical range of every operator in convex. See [3], p. 131.

[5]) z_0 is called an *extreme point* of the convex set A, if A has no line segment containing z_0 in its interior.

a point of $V(T)$. Thus, $E_T(e_1) \neq O$, and, by the same reason, $E_T(e_2) \neq O$. Choose vectors φ_i $(i=1, 2)$, $\|\varphi_i\|=1$ from the spectral subspaces corresponding to the sets e_i. Then we have

$$(T\varphi_i, \varphi_i) = \int_{e_i} z d\|E\varphi_i\|^2,$$

hence, by the lemma, $(T\varphi_i, \varphi_i) \in e_i$. Thus $W(T)$ has points in e_1 and in e_2. By the convexity of $W(T)$, z_0 must then belong to $W(T)$, too.

So we have proved that every point z_0 of $V(T)$ belongs to $W(T)$, i. e.

$$V(T) \subset W(T). \tag{4}$$

(1) and (4) together prove the Theorem 1.

Theorem 2. *There exists a normal contraction T for which the intersection of the numerical ranges of all the unitary dilations of T contains $W(T)$ as a proper subset.*

Proof. Let T be a normal operator with the following properties:

$$\sigma_c(T) = \{z : |z| = 1, \operatorname{Re} z \geqq 0\}, \quad \sigma_p(T) = \{0\}.$$

These properties imply that T is a contraction. Consequently, T has unitary dilations.

Such a T, is for example, the operator of multiplication by z in the Hilbert space L^2_μ of functions $f(z)$ on the complex plane, μ being the measure, which is supported by the set $\alpha \cup \{0\}$, where

$$\alpha = \{z : |z| = 1, \operatorname{Re} z \geqq 0\},$$

is positive and, say, equidistributed on α, and positive on $\{0\}$.

Consider a set $s \in S$. Since s has full E_T-measure, the point 0, which has positive E_T-measure, necessarily belongs to s. Further, s also includes the set

$$R = \{z : |z| < 1, \ \operatorname{Re} z > 0\}.$$

Indeed, in the contrary case the set s, being convex, would be disjoint from a whole subarc β of α; since β has positive E_T-measure this would contradict the fact that s is of full E_T-measure. Hence $s \supset R \cup \{0\}$. Since this is true for every set $s \in S$, we have

$$V(T) \supset R \cup \{0\}. \tag{5}$$

On the other hand, since $\overline{R}$ is convex and $E_T(\overline{R}) = I$, we have

$$\overline{R} \supset V(T). \tag{6}$$

If z_0 is an arbitrary point of α, then $\overline{R} - \{z_0\} \in S$ also holds, thus $z_0 \notin V(T)$. This and (6) imply that

$$\overline{R} - \alpha \supset V(T). \tag{7}$$

The set $\{z : |z| \leqq 1, \operatorname{Re} z > 0\} \cup \{0\}$ is obviously convex, and its E_T-measure is I, consequently it belongs to S. This fact and (7) prove that

$$R \cup \{0\} \supset V(T). \tag{8}$$

(5) and (8) imply $V(T) = R \cup \{0\}$, hence, according to Theorem 1, we have

(9) $$W(T) = R \cup \{0\}.$$

Now let U be an arbitrary unitary dilation of T. Then we have[4] $W(U) \supset W(T)$; thus, by (9),

(10) $$W(U) \supset R.$$

This implies that there exists no subarc β of α, which would be free of the points of $\sigma(U)$. Indeed, if there were such an arc β, then the part of the closed unit disc lying on the side of the centre from the chord of β would be of full E_U-measure, and convex, and so it would contain, by Theorem 1, the set $W(U)$, in contradiction to (10). Thus $\sigma(U)$ is dense on α, and since $\sigma(U)$ is closed, we have $\sigma(U) \supset \alpha$.

We shall show that $W(U)$ contains the whole open interval $(-i, i)$.

This is obvious if $\pm i$ both belong to $\sigma_p(U)$ and hence to $W(U)$, since then by the convexity of $W(U)$ the whole interval $[-i, i]$ also belongs to $W(U)$.

Suppose now that at least one of the points i and $-i$ does not belong to $\sigma_p(U)$. By symmetry it suffices to consider the case that i does not belong to $\sigma_p(U)$. We shall show that in this case the open halfcircle

$$\alpha' = \{z : |z| = 1, \ \mathrm{Re}\, z < 0\}$$

necessarily contains at least one point of $\sigma(U)$. In the contrary case the convex set

(11) $$\{z : |z| \leqq 1, \ \mathrm{Re}\, z > 0\} \cup \{-i\}$$

would be of full E_U measure, hence, by Theorem 1, it would contain $W(U)$, and this is a contradiction, since the point 0, which belongs to $W(U)$ by (9) and (10), does not belong to the set (11). Now, since $\sigma(U)$ has a point on α', and since, on the other hand, it contains α, $[\sigma(U)]^{\mathrm{conv}}$ contains the diameter $(-i, i)$ in its interior. The relation (2), when applied to U instead of T, yields then that $(-i, i)$ is also in the interior of $\overline{W(U)}$, and hence in $W(U)$.

Thus the diameter $(-i, i)$ belongs to the intersection of the numerical ranges of *all* the unitary dilations of T, and this proves, by (9), that $W(T)$ is a *proper* subset of this intersection.

*

I am deeply indebted to Professors B. Sz.-Nagy and P. R. Halmos for the help they have offered to me in the preparation of this paper.

References

[1] P. R. Halmos, Numerical ranges and normal dilations, *Acta Sci. Math.* **25**, (1964), 1–5

[2] H. Rubin and O. Wesler, A notation on convexity in Euclidian n-space, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **9** (1958), 522–523.

[3] M. H. Stone, *Linear transformations in Hilbert space* (New York, 1932).

(Received March 16, 1964)

Gleichung der autoparallelen Abweichung in n-dimensionalen Linienelementräumen

Von A. MOÓR in Szeged

Einleitung

Das Ziel unserer Arbeit ist die Bestimmung einer Bedingung dafür, daß die aus einem Punkte ausgehenden autoparallelen Kurven eines allgemeinen metrischen Linienelementraumes eine Hüllkurve haben. Im zweidimensionalen Falle haben wir dieses Problem mit Hilfe der Bestimmung der skalaren Form der autoparallelen Abweichung in unserem Aufsatz [5][1]) behandelt; im folgenden wollen wir unsere Resultate auf den n-dimensionalen Linienelementraum erweitern.

Der Fall, in dem das zu Grunde gelegte Linienelementraum $\mathfrak{L}_n$ eine Finslersche Metrik hat, d. h. der metrische Grundtensor g_{ik} von der Form

$$g_{ik} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2(x, v)}{\partial v^i \partial v^k}$$

ist, wo $F(x, v)$ die Grundfunktion bedeutet, wurde von H. RUND eingehend studiert und gelöst (vgl. [8]). Da im Finslerschen Raum die autoparallelen Kurven gleichzeitig geodätische Linien des Raumes sind, hängt der Problemkreis mit der zweiten Variation des Bogenlängenintegrals, bzw. mit dem möglichen Durchmesser des Raumes zusammen.

In unserem allgemeinen metrischen Linienelementraum sind die autoparallelen Kurven im allgemeinen von den geodätischen Linien verschieden; die Existenz, oder die Nichtexistenz einer Hüllkurve der autoparallelen Kurven drückt zwar eine sehr wichtige und charakteristische Eigenschaft der Struktur des Linienelementraumes aus, kann aber dann und nur dann für die Abschätzung des Durchmessers des Raumes benützt werden, falls die autoparallelen Kurven gleichzeitig geodätische Linien sind.

Die Existenz der Hüllkurve werden wir mit Hilfe der skalaren Form der Gleichung der autoparallelen Abweichung bestimmen. Die von uns verwandte Methode stammt von H. RUND (vgl. [8] § 1) und benützt wesentlich die Theorie der Unterräume. Dementsprechend werden wir im ersten Teil unserer Arbeit die Theorie der Unterräume der allgemeinen metrischen Linienelementräume entwickeln, im zweiten Teil bestimmen wir die Gleichung der autoparallelen Abweichung und dann geben wir eine Bedingung für die Existenz einer Hüllkurve der autoparallelen Kurven.

[1]) Die Zahlen in eckigen Klammern deuten auf die Literatur am Ende unserer Arbeit.

I. TEIL

THEORIE DER UNTERRÄUME DER ALLGEMEINEN METRISCHEN LINIENELEMENTRÄUME

§ 1. Grundformeln der allgemeinen metrischen Linienelementräume

Ein n-dimensionaler allgemeiner metrischer Linienelementraum $\mathfrak{L}_n$ ist eine Mannigfaltigkeit der Linienelemente (x^i, v^i) in der eine geometrische Struktur durch den symmetrischen Grundtensor $g_{ik}(x, v)$ und durch ein lineares invariantes Differential von der Form

(1. 1) $$D\xi^i = d\xi^i + M^{*i}_{j\ k}\xi^j\omega^k(d) + L^{*i}_{j\ k}\xi^j dx^k$$

(1. 1a) $$\omega^k(d) \overset{\text{def}}{=} Dl^k = (\delta^k_t + \overline{M}_o{}^k{}_t)(dl^t + L^{*t}_{o\ m}dx^m)$$

$$l^k \overset{\text{def}}{=} \frac{v^k}{F}, \quad F \overset{\text{def}}{=} (g_{ij}(x, v)v^iv^j)^{\frac{1}{2}}$$

festgelegt ist. (Vgl. [4] § 2, insbesondere die Formeln (2. 4) und (2. 5), und [6] Formel (2. 7)). Alle charakteristische Größen des Linienelementraumes $\mathfrak{L}_n$ sind in den v^i — die die Richtung des Linienelementes bestimmen — homogen von nullter Ordnung.

Die Grundgrößen g_{ik}, $M^{*i}_{j\ k}$ und $L^{*i}_{j\ k}$ sollen den folgenden Forderungen genügen: 1) die quadratische Form

$$g_{ik}(x, v)X^iX^k$$

soll in den Hilfsveränderlichen X^i positiv definit sein; 2) das invariante Differential (1. 1) soll metrisch sein, d. h. es soll

(1. 2) $$Dg_{ik} = 0$$

bestehen. Daraus erhält man, daß die Übertragungsparameter $M^{*i}_{j\ k}$ und $L^{*i}_{j\ k}$ die folgende Form haben müssen:

(1. 3) $$M^{*i}_{j\ k} \overset{\text{def}}{=} \overline{M}_j{}^i{}_t J^{*t}_k,$$

(1. 3a) $$\overline{M}_j{}^i{}_k \overset{\text{def}}{=} A_j{}^i{}_k + \mu_j{}^i{}_k, \qquad \mu_j{}^i{}_k \equiv g^{it}\mu_{jtk},$$

(1. 4) $$L^{*i}_{j\ k} \overset{\text{def}}{=} \Gamma^{*i}_{j\ k} - A_j{}^i{}_r J^r_t \sigma_o{}^t{}_k + \sigma_j{}^i{}_k, \qquad \sigma_j{}^i{}_k \equiv g^{it}\sigma_{jtk},$$

wo $$A_j{}^i{}_k \equiv g^{is}A_{jsk}, \quad A_{jsk} \overset{\text{def}}{=} \frac{F}{2}\partial_{v^k}g_{js}.$$

J^r_t und J^{*k}_t sollen die eindeutigen Lösungen der Gleichungssysteme

(1. 5a) $$(\delta^t_k + A_o{}^t{}_k)J^i_t = \delta^i_k$$

(1. 5b) $$(\delta^t_i + \overline{M}_o{}^t{}_i)J^{*k}_t = \delta^k_i$$

bedeuten (vgl. [6], Formeln (2. 5) und (3. 9), bzw. [4] Formeln (2. 15) und (2. 24)). Die Forderung der Eindeutigkeit der Lösungen der Gleichungssysteme (1. 5a) und (1. 5b) bedingt selbstverständlich die Gültigkeit der Ungleichungen

$$\operatorname{Det}(\delta_k^t + A_o{}^t{}_k) \neq 0, \quad \operatorname{Det}(\delta_i^t + \overline{M}_o{}^t{}_i) \neq 0,$$

was wir im folgenden immer annehmen wollen. Der Index „o" bedeutet — wie gewöhnlich — die Überschiebung mit dem Einheitsvektor l^i. μ_{jtk} bedeutet in der Formel (1. 3a) einen, in j, t schiefsymmetrischen Tensor, für den noch $\mu_{jto} = 0$ gelten soll; außer diesen Bedingungen ist μ_{jtk} beliebig wählbar. Die Ursache dieser Möglichkeit für μ_{jtk} ist das folgende: durch die Forderung (1. 2) sind die Übertragungsparameter noch nicht eindeutig bestimmt. (Vgl. [4] § 2 und [6] § 2). Wir bemerken hier, daß in [6] allgemeinere Übertragungsparameter konstruiert sind, als in [4], da in [6] die Forderung (2. 3b) von [4] nicht bedingt wird. Die Bedingung (2. 3b) von [4] bedeutet übrigens, daß

$$J_t^{*k} = \delta_t^k - \overline{M}_o{}^k{}_t \equiv \delta_t^k - (A_o{}^k{}_t + \mu_o{}^k{}_t)$$

ist, was aber für die folgenden keine Bedeutung hat, und somit nicht bedingt werden soll.

In der Formel (1. 4) ist $\Gamma_j^{*i}{}_k$ die Lösung des Gleichungssystems:

$$\Gamma_j^{*i}{}_k = \left\{ {i \atop j\,k} \right\} - A_j{}^i{}_t \Gamma_o^{*t}{}_k - A_k{}^i{}_t \Gamma_o^{*t}{}_j + A_{jkt} \Gamma_o^{*t}{}_r g^{ri}, \tag{1. 6}$$

wo $\left\{ {i \atop j\,k} \right\}$ die aus g_{ik} gebildeten Christoffelschen Symbole bedeuten (vgl. [6] Formel (3. 11b)) und σ_{jtk} ist ein beliebiger, aber in j, t schiefsymmetrischer Tensor.

Die Tensoren g_{ik}, μ_{ijk} und σ_{ijk} bilden die Grundtensoren des allgemeinen metrischen Linienelementraumes. Nach diesen Tensoren sind die Übertragungsparameter durch die Formeln (1. 3), (1. 4) und (1. 6), bzw. durch den metrischen Fundamentaltensor g_{ik} bestimmt.

§ 2. Grundgrößen der m-dimensionalen Unterräume

Die Theorie der m-dimensionalen Unterräume der Finslerschen Räume hat E.T. Davies in seiner grundlegenden Arbeit [2] entwickelt und dann S. Kikuchi weiter geführt (vgl. [3]). Derjenige Teil dieser Theorie, der das invariante Differential nicht benützt, d. h. die Bestimmung der Tangenten — bzw. Normalenvektoren ist auch in unserem allgemeinen metrischen Linienelementraum gültig, da der Unterschied bezüglich einer Finslerschen Metrik eben in dem Unterschied der invarianten Differentiale besteht. Wir stellen aber in diesem Paragraphen die wichtigsten Formeln der Tangenten- und Normalenvektoren zusammen.

Ein m-dimensionaler Unterraum $\mathfrak{U}_m$ $(m \geqq 2)$ ist durch die Gleichungen:

$$x^i = x^i(u^1, u^2, \ldots, u^m) \qquad (m \geqq 2) \tag{2. 1}$$

definiert. Die Tangentenvektoren von $\mathfrak{U}_m$ sind die Vektoren

(2. 2) $$B^i_\alpha \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, m\text{ [2]})$$

von denen wir annehmen, daß der Rang der durch B^i_α bestimmten Matrix: $\|B^i_\alpha\|$ gleich m ist. Die tangenten Linienelemente von $\mathfrak{U}_m$ sind durch die Formeln

(2. 3) $$v^i = B^i_\alpha \dot{u}^\alpha$$

festgelegt. Den Unterraum $\mathfrak{U}_m$ betrachten wir also im folgenden als eine Mannigfaltigkeit der Linienelemente $(u^\alpha, \dot{u}^\alpha)$, deren Raumkomponenten durch (2.1) und (2. 3) angegeben sind.

Der metrische Grundtensor von $\mathfrak{U}_m$ ist durch die Formel

(2. 4) $$g_{\alpha\beta}(u, \dot{u}) \overset{\text{def}}{=} g_{ij}(x(u), B^k_\gamma \dot{u}^\gamma) B^i_\alpha B^j_\beta$$

definiert. Auf Grund von (2. 3) und (2. 4) folgt, daß in den Linienelementen von $\mathfrak{U}_m$

(2. 5) $$F(u, \dot{u}) \overset{\text{def}}{=} \sqrt{g_{\alpha\beta}\dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta} = \sqrt{g_{ij}v^i v^j} = F(x, v)$$

besteht, d. h. die Grundfunktion von $\mathfrak{U}_m$ stimmt mit der des allgemeinen metrischen Linienelementraumes $\mathfrak{L}_n$ überein.

Aus (2. 4) und (2. 5) folgt für den inneren Torsionstensor von $\mathfrak{U}_m$ die Formel:

$$A_{\alpha\beta\gamma} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2} F\partial_{\dot{u}^\gamma} g_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} F\partial_{v^k} g_{ij} B^i_\alpha B^j_\beta B^k_\gamma = A_{ijk} B^i_\alpha B^j_\beta B^k_\gamma,$$

d. h. $A_{\alpha\beta\gamma}$ ist die Projektion von A_{ijk} auf den Unterraum $\mathfrak{U}_m$. In der gewöhnlichen Weise definieren wir durch

$$g^{\alpha\beta}(u, \dot{u}) g_{\alpha\gamma}(u, \dot{u}) = \delta^\beta_\gamma$$

die kontravarianten Komponenten des metrischen Grundtensors $g_{\alpha\beta}$ von $\mathfrak{U}_m$ (δ^β_γ bedeutet das Kronecker-δ).

Neben den Vektoren B^i_α benützen wir noch die folgenden sogenannten Projektionsfaktoren von $\mathfrak{U}_m$:

$$B^\alpha_i \overset{\text{def}}{=} g^{\alpha\beta} g_{ij} B^j_\beta.$$

Die kontra- und kovarianten Normalenvektoren C^ϱ_i und C^i_ϱ wählen wir so, daß die folgenden Relationen gelten:

(2. 6) $$\begin{cases} \text{(a)} \quad B^i_\alpha B^\beta_i = \delta^\beta_\alpha, & \text{(b)} \quad B^\alpha_i C^i_\varrho = 0, \\ \text{(c)} \quad C^\varrho_i B^i_\alpha = 0, & \text{(d)} \quad C^i_\varrho C^\sigma_i = \delta^\sigma_\varrho, \\ \qquad \text{(e)} \quad B^i_\alpha B^\alpha_j + C^i_\varrho C^\varrho_j = \delta^i_j & \end{cases}$$

[2]) Die griechischen Buchstaben $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ werden immer die Zahlen $1, 2, \ldots, m$ die Buchstaben ϱ, σ, τ die Zahlen $(m+1), \ldots, n$ bezeichnen. Die lateinischen Indizes bedeuten die Zahlen $1, 2, \ldots, n$.

(vgl. [2] Formeln (13), oder [10] Kapitel 5, § 2). Man kann sogar die C_i^ϱ auf Grund von (2. 6) (c) wegen der Unabhängigkeit der B_α^i von den $\dot{u}^\alpha$ so bestimmen, daß

$$\partial_{\dot{u}^\alpha} C_i^\varrho = 0 \tag{2. 7}$$

sei (vgl. [2] Seite 22).

§ 3. Induziertes invariantes Differential

Die Mannigfaltigkeit der tangentialen Linienelemente eines m-dimensionalen Unterraumes $\mathfrak{U}_m$ ist durch die Gleichungen

$$x^i = x^i(u^1, u^2, \ldots, u^m), \quad v^i = B_\alpha^i \dot{u}^\alpha \tag{3. 1}$$

festgelegt. Wenn nicht anders gesetzt wird, wollen wir im folgenden immer solche Linienelemente betrachten, die der Relationen (3. 1) genügen. Das invariante Differential eines tangentialen Vektors

$$\xi^i(x, v) = B_\alpha^i \xi^\alpha(u, \dot{u})$$

ist nach (1. 1) von der Form:

$$D\xi^i = \xi^\alpha dB_\alpha^i + B_\alpha^i d\xi^\alpha + M_j^{*i}{}_k B_\alpha^j \xi^\alpha \omega^k(d) + L_j^{*i}{}_k B_\alpha^j B_\beta^k \xi^\alpha du^\beta. \tag{3. 2}$$

Der Vektor $D\xi^i$ ist im allgemeinen kein Tangentenvektor von $\mathfrak{U}_m$; wir wollen nun den Vektor (3. 2) mit Hilfe des n-Beins B_α^i, C_ϱ^i bezüglich $\mathfrak{U}_m$ in tangentiale bzw. normale Komponenten zerlegen. Vor allem berechnen wir das invariante Differential von l^k. Nach (2. 5) und (3. 1) ist

$$l^k = \frac{v^k}{F} = B_\beta^k \frac{\dot{u}^\beta}{F} = B_\beta^k l^\beta,$$

und somit wird auf Grund von (1. 1a)

$$\omega^k(d) = (\delta_t^k + \overline{M}_o{}^k{}_t) B_\beta^t dl^\beta + (\delta_t^k + \overline{M}_o{}^k{}_t)(l^\beta B_{\beta\gamma}^t + L_o^{*t}{}_m B_\gamma^m)\, du^\gamma,$$

wo

$$B_{\beta\gamma}^t \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 x^t}{\partial u^\beta \partial u^\gamma}, \quad \overline{M}_j{}^k{}_t \overset{\text{def}}{=} A_j{}^k{}_t + \mu_j{}^k{}_t \tag{3. 3}$$

bedeutet. Auf Grund von (2. 6) (e) wird

$$\omega^k(d) = (\delta_t^k + \overline{M}_o{}^k{}_t)(B_\beta^t \overset{*}{\omega}{}^\beta(d) + C_\varrho^t A_\gamma^\varrho du^\gamma), \tag{3. 4}$$

wo

$$\overset{*}{\omega}{}^\beta(d) \overset{\text{def}}{=} dl^\beta + (B_j^\beta B_{o\gamma}^j + L_o^{*\beta}{}_\gamma)\, du^\gamma, \quad B_{o\gamma}^j \overset{\text{def}}{=} B_{\alpha\gamma}^j l^\alpha \tag{3. 4a}$$

$$A_\gamma^\varrho \overset{\text{def}}{=} C_j^\varrho B_{o\gamma}^j + L_o^{*\varrho}{}_\gamma \tag{3. 4b}$$

bezeichnen; dabei bedeuten die griechischen Indizes, daß die entsprechenden Größen des Linienelementraumes $\mathfrak{L}_n$ mit den Projektionsvektoren überschieben sind. Es ist also:

$$L_o^{*\beta}{}_\gamma \overset{\text{def}}{=} B_j^\beta B_\gamma^k L_o^{*j}{}_k, \quad L_o^{*\varrho}{}_\gamma \overset{\text{def}}{=} C_j^\varrho B_\gamma^k L_o^{*j}{}_k,$$
$$\beta, \gamma = 1, \ldots, m; \quad \varrho = m+1, \ldots, n.$$

Nach der Definitionsformel (1. 3) bekommt man auf Grund von (1. 5b):

$$M_j^{*i}{}_k(\delta_t^k + \overline{M}_o{}^k{}_t) = \overline{M}_j{}^i{}_s J_k^{*s}(\delta_t^k + \overline{M}_o{}^k{}_t) = \overline{M}_j{}^i{}_t$$

und somit erhält man aus (3. 2) nach der Substitution von $\omega^k(d)$ aus (3. 4)

$$D\xi^i = B_\alpha^i d\xi^\alpha + \{dB_\alpha^i + \overline{M}_\alpha{}^i{}_\beta \overset{*}{\omega}{}^\beta + (\overline{M}_\alpha{}^i{}_\varrho \Lambda_\beta^\varrho + L_\alpha^{*i}{}_\beta)\, du^\beta\}\, \xi^\alpha \text{ [3]}. \tag{3. 5}$$

Beachten wir nun, daß

$$dB_\alpha^i = B_{\alpha\beta}^i\, du^\beta$$

ist, führen wir ferner Bezeichnung

$$\Lambda_\alpha^{*\gamma}{}_\beta \overset{\text{def}}{=} B_r^\gamma B_{\alpha\beta}^r + \overline{M}_\alpha{}^\gamma{}_\varrho \Lambda_\beta^\varrho + L_\alpha^{*\gamma}{}_\beta \tag{3. 6}$$

ein, so wird aus (3. 5) auf Grund der Relation (2. 6) (e):

$$D\xi^i = B_\gamma^i \overset{*}{D}\xi^\gamma + C_\sigma^i\{\overline{M}_\alpha{}^\sigma{}_\beta \overset{*}{\omega}{}^\beta + (C_j^\sigma B_{\alpha\beta}^j + \overline{M}_\alpha{}^\sigma{}_\varrho \Lambda_\beta^\varrho + L_\alpha^{*\sigma}{}_\beta)\, du^\beta\}\, \xi^\alpha \tag{3. 7}$$

mit

$$\overset{*}{D}\xi^\gamma = d\xi^\gamma + \overline{M}_\alpha{}^\gamma{}_\beta \xi^\alpha \overset{*}{\omega}{}^\beta(d) + \Lambda_\alpha^{*\gamma}{}_\beta \xi^\alpha\, du^\beta. \tag{3. 8}$$

Die Formel (3. 7) gibt schon die Zerlegung des invarianten Differentials nach dem n-Bein B_γ^i, C_σ^i; $\overset{*}{\omega}{}^\beta$ ist aber im allgemeinen nicht das invariante Differential von l^β. Wir werden deshalb die Formeln (3. 7) und (3. 8) umformen und statt $\overset{*}{\omega}{}^\beta$ die Größe $\overset{*}{D}l^\beta$ einführen. Für $\xi^\gamma = l^\gamma$ folgt aus (3. 8)

$$\overset{*}{D}l^\gamma = dl^\gamma + \overline{M}_o{}^\gamma{}_\beta \overset{*}{\omega}{}^\beta(d) + \Lambda_o^{*\gamma}{}_\beta\, du^\beta.$$

Eliminieren wir nun aus dieser Formel dl^γ mittels (3. 4a), so wird im Hinblick auf die Formel (3. 6):

$$\overset{*}{D}l^\gamma = (\delta_\alpha^\gamma + \overline{M}_o{}^\gamma{}_\alpha)\overset{*}{\omega}{}^\alpha(d) + \overline{M}_o{}^\gamma{}_\varrho \Lambda_\beta^\varrho\, du^\beta. \tag{3. 9}$$

Aus dieser Formel folgt, daß

$$\overset{*}{D}l^\alpha = \overset{*}{\omega}{}^\alpha(d)$$

besteht, falls $\overline{M}_o{}^\gamma{}_\alpha = 0$ ist. In diesem Falle hat schon das induzierte invariante Differential (3. 8) die gewünschte Form.

---

[3]) Unserer vorigen Bemerkung entsprechend ist

$$\overline{M}_\alpha{}^i{}_\varrho \overset{\text{def}}{=} B_\alpha^j C_\varrho^k \overline{M}_j{}^i{}_k.$$

Nehmen wir jetzt an, daß $\overline{M}_o{}^\gamma{}_\alpha \neq 0$ ist. In diesem Falle bedingen wir die Gültigkeit der Ungleichung

$$\operatorname{Det}(\delta_\alpha^\gamma + \overline{M}_o{}^\gamma{}_\alpha) \neq 0.$$

Das bedeutet aber, daß das Gleichungssystem

$$(\delta_\alpha^\gamma + \overline{M}_o{}^\gamma{}_\alpha)\theta_\gamma^\beta = \delta_\alpha^\beta \tag{3.10}$$

auf θ_γ^β eindeutig lösbar ist. Eine Überschiebung der Gleichung (3. 9) mit θ_γ^β ergibt nach (3. 10) $\overset{*}{\omega}{}^\beta(d)$, ausgedrückt durch $\overset{*}{D}l^\beta$. Substituieren wir das in (3. 7) und (3. 8), so bekommt man:

$$\begin{aligned} D\xi^i = B_\gamma^i \overset{*}{D}\xi^\gamma + C_\sigma^i\{\overline{M}_\alpha{}^\sigma{}_\beta\theta_\gamma^\beta \overset{*}{D}l^\gamma + (B_{\alpha\gamma}^\sigma + \overline{M}_\alpha{}^\sigma{}_\varrho \Lambda_\gamma^\varrho + \\ + L^{*\sigma}_\alpha{}_\gamma - \overline{M}_\alpha{}^\sigma{}_\beta\theta_\delta^\beta \overline{M}_o{}^\delta{}_\varrho \Lambda_\gamma^\varrho)\, du^\gamma\}\,\xi^\alpha, \quad B_{\alpha\gamma}^\sigma \overset{\text{def}}{=} C_i^\sigma B_{\alpha\gamma}^i, \text{ [4]} \end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\overset{*}{D}\xi^\gamma = d\xi^\gamma + \overline{M}_\alpha{}^\gamma{}_\delta\theta_\beta^\delta \overset{*}{D}l^\beta + (\Lambda^{*\gamma}_\alpha{}_\beta - \overline{M}_\alpha{}^\gamma{}_\delta\theta_\varepsilon^\delta \overline{M}_o{}^\varepsilon{}_\varrho \Lambda_\beta^\varrho)\xi^\alpha\, du^\beta. \tag{3.12}$$

Aus der Formel (3. 11) folgt leicht der folgende

Satz I. *Liegt die Linienelementfolge $(x^i(s), v^i(s))$ in dem Unterraum $\mathfrak{U}_m$ und ist der Tangentenvektor von $\mathfrak{U}_m$*

$$\xi^i = B_\alpha^i \xi^\alpha$$

längs dieser Linienelementfolge im Sinne der Raumübertragung „D" parallel verschoben, so ist auch ξ^α im Sinne der $\mathfrak{U}_m$-Übertragung „$\overset{*}{D}$" parallel verschoben.

Beweis. Aus der Bedingung

$$D\xi^i = 0 \tag{3.13}$$

folgt nach (3. 11)

$$B_\gamma^i \overset{*}{D}\xi^\gamma + C_\sigma^i \Phi^\sigma(\xi) = 0,$$

wo Φ^σ der entsprechende Koeffizient von C_σ^i in (3. 11) bedeutet. Eine Überschiebung unserer letzten Formel mit B_i^α ergibt nach (2. 6) (a) unmittelbar die Relation

$$\overset{*}{D}\xi^\alpha = 0, \tag{3.14}$$

was unsere Behauptung beweist.

Bedeutet nun der Vektor

$$\xi^i \equiv \frac{dx^i}{ds} = B_\alpha^i \frac{du^\alpha}{ds}, \quad \frac{du^\alpha}{ds} = \xi^\alpha$$

den Tangentenvektor einer autoparallelen Kurve des Raumes, d. h. (3. 13) ist gültig,

---

[4]) Auch bei den nicht-tensoriellen Größen $B_{\alpha\beta}$ bezeichnen wir durch den Index σ die Überschiebung mit C_i^σ. Es ist also

$$B_{\alpha\gamma}^\sigma \equiv C_i^\sigma \frac{\partial^2 x^i}{\partial u^\alpha \partial u^\gamma}.$$

so folgt aus dem Satze I, daß auch (3. 14) gültig ist. Dies kann man im folgenden Korollar ausdrücken:

Korollar I. *Liegt eine autoparallele Kurve des Raumes* $\mathfrak{L}_n$ *im Unterraum* $\mathfrak{U}_m$, *so ist sie im Sinne der* $\mathfrak{U}_m$*-Übertragung* „$\overset{*}{D}$“ *auch autoparallel.*

§ 4. Die zweite Grundform der Unterräume

Bezeichnen wir durch C eine Kurve in dem Unterraum $\mathfrak{U}_m$, und die Gleichungen von C seien durch

$$u^\alpha = u^\alpha(s), \quad \dot{u}^\alpha = \frac{du^\alpha}{ds} \equiv u'^\alpha$$

angegeben, wo der Parameter s die Bogenlänge bedeutet. In Raumkoordinaten sind die Gleichungen von C von der Form:

$$x^i = x^i(u(s)), \quad v^i = B^i_\alpha u'^\alpha = \frac{dx^i}{ds} \equiv x'^i.$$

Da der Parameter s die Bogenlänge bedeutet, gilt nach (2. 4):

$$g_{ij} v^i v^j = g_{ij} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} = g_{\alpha\beta} u'^\alpha u'^\beta = 1. \tag{4. 1}$$

Wie in den Riemannschen und Finslerschen Räumen, folgt aus dieser Gleichung auch in unserem allgemeinen metrischen Linienelementraum, daß der Krümmungsvektor Dx'^i auf den Tangentenvektor x'^i orthogonal steht. Der erste Normalenvektor der Kurve C ist durch die verallgemeinerten Frenet-Formeln:

$$\frac{D^2 x^i}{ds^2} \equiv \frac{Dx'^i}{ds} = \varkappa \eta^i \tag{4. 2}$$

definiert, wo η^i der erste Normalenvektor und

$$\varkappa = \sqrt{g_{ij}(x(s), x'(s)) \frac{Dx'^i}{ds} \frac{Dx'^j}{ds}} \tag{4. 2a}$$

die erste Krümmung von C ist.

Bemerkung. Die Formeln (4. 2) und (4. 2a) sind für alle Raumkurven gültig und nicht nur für die Kurven von $\mathfrak{U}_m$. –

Für die Kurven von $\mathfrak{U}_m$ gilt nun

$$\frac{dx^i}{ds} C^\varrho_i = 0.$$

Differenziert man diese Gleichung nach s, so wird auf Grund von $ds = Ds$, (was aber nur für Invarianten gültig ist):

$$\frac{D^2 x^i}{ds^2} C^\varrho_i + \frac{dx^i}{ds} \frac{DC^\varrho_i}{ds} = 0.$$

Auf Grund von (4. 2) wird nun nach der Bezeichnung:

$$\cos\varphi_\varrho \stackrel{\text{def}}{=} \eta^i C_i^\varrho$$

die Relation

(4. 3) $$\varkappa\cos\varphi_\varrho + B_\alpha^i \frac{DC_i^\varrho}{ds}\frac{du^\alpha}{ds} = 0$$

bestehen. Differenziert man nun die Gleichung (2. 6) (c) invariant nach s, so wird

$$B_\alpha^i \frac{DC_i^\varrho}{ds} = -C_i^\varrho \frac{DB_\alpha^i}{ds}$$

und aus (4. 3) erhält man

(4. 4) $$\varkappa_\varrho \stackrel{\text{def}}{=} \varkappa\cos\varphi_\varrho = C_i^\varrho \frac{DB_\alpha^i}{ds}\frac{du^\alpha}{ds}, \qquad (\varrho = m+1, \dots, n).$$

Ist $\varphi_\varrho = 0$, so gibt (4. 4) die zum Normalenvektor C_i^ϱ gehörige Normalkrümmung in der Richtung u'^α.

Nehmen wir an, daß die Kurve C eine autoparallele Kurve im Sinne der „$\overset{*}{D}$"-Übertragung von $\mathfrak{U}_m$ ist, d. h. es ist nach (3. 14)

(4. 5) $$\overset{*}{D} l^\alpha = 0, \quad l^\alpha = \frac{du^\alpha}{ds}.$$

Aus (3. 9) folgt nun nach einer Überschiebung mit θ_γ^β nach (3. 10)

$$\overset{*}{\omega}{}^\beta(d) = -\theta_\gamma^\beta \overline{M}_o{}^\gamma{}_\varrho \Lambda_\alpha^\varrho \frac{du^\alpha}{ds}$$

und nach (3. 4):

(4. 6) $$\omega^k(d) = -(B_\beta^k + \overline{M}_o{}^k{}_\beta)\theta_\gamma^\beta \overline{M}_o{}^\gamma{}_\varrho \Lambda_\alpha^\varrho \frac{du^\alpha}{ds} + (C_\varrho^k + \overline{M}_o{}^k{}_\varrho)\Lambda_\alpha^\varrho \frac{du^\alpha}{ds}.$$

Berechnen wir nun DB_α^i mittels der Formel (1. 1), beachten wir ferner, daß nach (1. 3) und (1. 5b) die Relationen

$$M^{*i}_j{}_k(B_\beta^k + \overline{M}_o{}^k{}_\beta) = \overline{M}_j{}^i{}_t J_k^{*t} B_\beta^r(\delta_r^k + \overline{M}_o{}^k{}_r) = \overline{M}_j{}^i{}_\beta$$

$$M^{*i}_j{}_k(C_\varrho^k + \overline{M}_o{}^k{}_\varrho) = \overline{M}_j{}^i{}_t J_k^{*t} C_\varrho^s(\delta_s^k + \overline{M}_o{}^k{}_s) = \overline{M}_j{}^i{}_\varrho.$$

bestehen, so wird nach (4. 6)

$$DB_\alpha^i = \{B_{\alpha\beta}^i + L^{*i}_\alpha{}_\beta - \overline{M}_\alpha{}^i{}_\gamma \theta_\delta^\gamma \overline{M}_o{}^\delta{}_\sigma \Lambda_\beta^\sigma + \overline{M}_\alpha{}^i{}_\sigma \Lambda_\beta^\sigma\}\, du^\beta.$$

Substituiert man das in die Formel (4. 4), so wird:

(4. 7) $$\varkappa_\varrho = \Omega_{\alpha\beta}^{(\varrho)} \frac{du^\alpha}{ds}\frac{du^\beta}{ds}$$

bestehen, mit

(4. 7a) $$\Omega_{\alpha\beta}^{(\varrho)} \stackrel{\text{def}}{=} B_{\alpha\beta}^\varrho + L^{*\varrho}_\alpha{}_\beta - (\overline{M}_\alpha{}^\varrho{}_\gamma \theta_\delta^\gamma \overline{M}_o{}^\delta{}_\sigma - \overline{M}_\alpha{}^\varrho{}_\sigma)\Lambda_\beta^\sigma.$$

Offenbar ist in einem allgemeinen $\mathfrak{L}_n$-Raum $\Omega^{(\varrho)}_{\alpha\beta} \neq \Omega^{(\varrho)}_{\beta\alpha}$. (4. 7a) bestimmt die Koeffizienten der zweiten Grundform des Unterraumes $\mathfrak{U}_m$.

Mit Hilfe von (4. 7a) kann nun (3. 11) in der Form:

$$D\xi^i = B^i_\gamma \overset{*}{D}\xi^\gamma + C^i_\sigma \{\overline{M}_\alpha{}^\sigma{}_\beta \theta^\beta_\gamma \overset{*}{D} l^\gamma + \Omega^{(\sigma)}_{\alpha\beta}\, du^\beta\}\, \xi^\alpha \tag{4. 8}$$

angegeben werden, die in folgenden eine sehr wichtige Rolle spielen wird.

Eine Überschiebung mit B^δ_i gibt nach (2. 6) (a), (b) die Relation:

$$\overset{*}{D}\xi^\delta = B^\delta_i D\xi^i. \tag{4. 9}$$

§ 5. Bemerkungen über die Dupinsche Indikatrix

Es sei in diesem Paragraphen $m = n-1$. $\mathfrak{U}_{n-1}$ ist jetzt eine Hyperfläche des allgemeinen metrischen Linienelementraumes $\mathfrak{L}_n$. Die Formeln (4. 7) und (4. 7a) bestehen in diesem Falle je aus einer Gleichung, da jetzt nur $\varrho, \sigma = n$ gelten kann. Es ist

$$\varkappa \equiv \frac{1}{r} = \Omega_{\alpha\beta}(u, u') u'^\alpha u'^\beta, \tag{5. 1}$$

mit

$$\Omega_{\alpha\beta} \overset{\text{def}}{=} C_i \big(B^i_{\alpha\beta} + L^{*i}_{\alpha\ \beta} - (\overline{M}_\alpha{}^i{}_\gamma \theta^\gamma_\delta \overline{M}_o{}^\delta{}_\sigma - \overline{M}_\alpha{}^i{}_\sigma) A^\sigma_\beta\big), \tag{5. 1a}$$

wo der Normalenvektor C_i und die Größen $B^i_{\alpha\beta}$ von den u'^α unabhängig sind (vgl. die Formeln (2. 2) und (2. 7)).

Da $\Omega_{\alpha\beta}$ in den u'^α homogen von nullter Ordnung ist, bekommt man aus (5. 1) nach einer zuläßigen Parametertransformation $s = s(t)$

$$\frac{1}{r} = \frac{\Omega_{\alpha\beta}(u, \dot{u}) \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta}{g_{\alpha\beta}(u, \dot{u}) \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta}, \tag{5. 2}$$

wo für $\dot{u}^\alpha$, u'^α die Relation

$$u'^\alpha = \frac{\dot{u}^\alpha}{\sqrt{g_{\gamma\beta}(u, \dot{u}) \dot{u}^\gamma \dot{u}^\beta}}$$

gilt. Die Formel (5. 2) ist im wesentlichen mit (5. 1) identisch, nur der Parameter t ist in (5. 2) beliebig.

Durch die Gleichung

$$\Omega_{\alpha\beta}(u, \dot{u}) \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta = 1, \tag{5. 3}$$

in der die $\dot{u}^\alpha$ die Veränderlichen sind, ist eine $(n-2)$-dimensionale Hyperfläche bestimmt, die als Dupinsche Indikatrix von $\mathfrak{U}_{n-1}$ betrachtet werden kann. Auf Grund von (5. 3) sind nun die Extremalrichtungen von (5. 2) mit den Extremalrichtungen von

$$g_{\alpha\beta}(u, \dot{u}) \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta \tag{5. 4}$$

identisch (vgl. [9] § 3 auf S. 494, oder [10] Kapitel V., § 7 auf S. 196).

Die Extremalwerte von (5. 4) mit den Nebenbedingungen (5. 3) erhält man aus dem Gleichungssystem:

$$\frac{\partial}{\partial \dot{u}^\gamma}\left(g_{\alpha\beta}\dot{u}^\alpha\dot{u}^\beta+\lambda(\Omega_{(\alpha\beta)}\dot{u}^\alpha\dot{u}^\beta-1)\right)=0, \tag{5. 5}$$

da (5. 3) offenbar nur den symmetrischen Teil von $\Omega_{\alpha\beta}$ enthält. Aus (5. 5) bekommt man

$$\left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \dot{u}^\gamma}+\lambda\frac{\partial\Omega_{(\alpha\beta)}}{\partial \dot{u}^\gamma}\right)\dot{u}^\alpha\dot{u}^\beta+2(g_{\gamma\beta}+\lambda\Omega_{(\gamma\beta)})\dot{u}^\beta=0. \tag{5. 6}$$

Eine Überschiebung von (5. 6) mit $\dot{u}^\gamma$ gibt wegen der Homogenität nullter Ordnung von $g_{\alpha\beta}$ und $\Omega_{\alpha\beta}$ in den $\dot{u}^\alpha$:

$$(g_{\gamma\beta}+\lambda\Omega_{\gamma\beta})\dot{u}^\gamma\dot{u}^\beta=0 \tag{5. 7}$$

und ein Vergleich mit (5. 2) zeigt, daß $\lambda=-r$ ist. Setzen wir das in (5. 6) ein, so bekommt man den

Satz II. *Die Hauptrichtungen der Hyperfläche $\mathfrak{U}_{n-1}$ sind die Lösungen des Gleichungssystems*

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \dot{u}^\gamma}-r\frac{\partial\Omega_{(\alpha\beta)}}{\partial \dot{u}^\gamma}\right)\dot{u}^\alpha\dot{u}^\beta+(g_{\gamma\beta}-r\Omega_{(\gamma\beta)})\dot{u}^\beta=0 \tag{5. 8}$$

wo r die entsprechenden Hauptkrümmungsradien bezeichnet.

Aus der Formel (5. 8) folgt im Hinblick auf die Gleichungen (3. 6) von [9] das

Korollar II. *Ein zum Finslerschen Fall analoger Fall entsteht für die Bestimmung der Hauptrichtungen, falls*

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \dot{u}^\gamma}\dot{u}^\alpha\dot{u}^\beta=0, \quad \frac{\partial\Omega_{\alpha\beta}}{\partial \dot{u}^\gamma}\dot{u}^\alpha\dot{u}^\beta=0 \tag{5. 9}$$

sind.

Beweis: Die Gleichung (3. 6) von [9] ist in unserer Schreibweise

$$g_{\alpha\beta}u'^\alpha=r\Omega_{\alpha\beta}u'^\alpha,$$

woraus nach (5. 8) und (5. 9) die Behauptung unmittelbar folgt. (Im Finslerschen Fall ist $\Omega_{\alpha\beta}$ in α,β symmetrisch).

II. TEIL

DIE AUTOPARALLELE ABWEICHUNG

§ 6. Gleichung der autoparallelen Abweichung

Es sei O ein Punkt des Linienelementraumes $\mathfrak{L}_n$ durch den eine Schar autoparalleler Kurven geht. Nehmen wir an, daß diese Schar autoparalleler Kurven auf einem zweidimensionalen sogenannten „autoparallelen Unterraum $\mathfrak{U}_2$ mit dem Pol

O" liegt. Diese $\mathfrak{U}_2$ hat also die charakteristische Eigenschaft, daß die autoparallelen Kurven von $\mathfrak{U}_2$ durch den Punkt O, auch im Sinne der „D"-Übertragung des Linienelementraumes $\mathfrak{L}_n$ autoparallel sind. Diese Eigenschaft beschränkt zwar den Unterraum $\mathfrak{U}_2$, doch ist dadurch $\mathfrak{U}_2$ offenbar noch nicht festgelegt.

C und $\bar{C}$ seien nun zwei unendlich benachbarte Kurven dieser Schar. Das bedeutet das folgende: Es sei die Gleichung von C bzw. $\bar{C}$ durch

$$\frac{d^2x^i}{ds^2}+L^{*i}_{j\,k}(x, x')\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}=0, \quad x'^i\equiv\frac{dx^i}{ds}$$

bzw.

$$\frac{d^2\psi^i}{d\sigma^2}+L^{*i}_{j\,k}(\psi, \psi')\frac{d\psi^j}{d\sigma}\frac{d\psi^k}{d\sigma}=0, \quad \psi'^i\equiv\frac{d\psi^i}{d\sigma}$$

angegeben, wo s, bzw. σ die von O gerechnete Bogenlänge auf C bzw. $\bar{C}$ bedeutet. Die Punkte von C und $\bar{C}$ seien durch die Formeln

$$\psi^i(\sigma)=x^i(s)+\xi^i(s), \quad \xi^i(0)=0$$

zueinander geordnet, wo $\xi^i(s)$ einen infinitesimalen Vektor bedeutet. Die Parameterwerte s und σ sollen der Relationen

$$\frac{d\sigma}{ds}=1+\lambda(s), \qquad \lambda(0)=0$$

genügen, wo $\lambda(s)$ eine infinitesimale Größe von derselben Ordnung wie $\xi^i(s)$ ist (vgl. [5] § 3).

Der Vektor ξ^i genügt der Gleichung

$$\frac{D^2\xi^i}{ds^2}+\frac{d\lambda}{ds}\frac{dx^i}{ds}+\left(2\Omega^{*i}_{o\,k}+L^{*i}_{j\,t}\|_k l^j l^t\right)\frac{D\xi^k}{ds}+ \tag{6. 1}$$

$$+\left(2L^{*i}_{j\,k}\|_t l^j l^k \Omega^{*t}_{o\,m}+\bar{R}_{o\,om}^{\;i}+2\Omega^{*i}_{o\,m}|_o\right)\xi^m=0,$$

die die Gleichung der autoparallelen Abweichung ist (vgl. [5], Formel (3. 7)). Der Tensor $\Omega^{*i}_{j\,k}$ ist der schiefsymmetrische Teil von $L^{*i}_{j\,k}$, der Tensor $\bar{R}_{j\,km}^{\;i}$ ist der Hauptkrümmungstensor (vgl. [5] (1. 12)), die Operation $\|_t$ bedeutet die partielle Ableitung nach v^t multipliziert mit $F(x, v)$, endlich ist die Operation $|_k$ die kovariante Ableitung gebildet durch die $L^{*i}_{j\,k}$.

In unserer Arbeit [5] haben wir weiterhin bedingt, daß der allgemeine metrische Linienelementraum $\mathfrak{L}_n$ zweidimensional sei und wir bestimmten unter dieser Bedingung eine skalare Form von (6. 1). Jetzt werden wir im folgenden eine skalare Form von (6. 1) ohne Beschränkung der Dimensionszahl herleiten.

Der Vektor ξ^i bestimmen wir auf die Weise, daß

$$l_i\xi^i\equiv g_{ik}l^k\xi^i=0, \qquad l^k=\frac{dx^k}{ds} \tag{6. 2}$$

gültig sei. Da C eine autoparallele Kurve ist, hat man

$$Dl_i=0, \quad \omega^i(d)\equiv Dl^i=0 \tag{6. 3}$$

(vgl. z. B. [4] (5. 5) und (5. 5a)). Durch Ableitung nach s bekommt man aus (6. 2):

$$l_i \frac{D\xi^i}{ds} = 0. \tag{6. 4}$$

Bezeichnen wir jetzt durch ξ die Länge des Vektors ξ^i, und durch X^i den Einheitsvektor, der die Richtung von ξ^i hat, d. h. es ist längs C

$$\xi^i = \xi X^i, \quad \xi \overset{\text{def}}{=} \sqrt{g_{ik}\xi^i\xi^k} \tag{6. 5}$$

$$g_{ik} X^i X^k = 1. \tag{6. 6}$$

Differenzieren wir (6. 5) invariant nach s, beachten wir ferner, daß für Skalaren $\frac{d}{ds} = \frac{D}{ds}$ ist, so wird

$$\frac{D\xi^i}{ds} = \xi \frac{DX^i}{ds} + X^i \frac{d\xi}{ds}.$$

Eine Überschiebung mit l_i gibt nun auf Grund von (6. 2) und (6. 4) die Relation

$$l_i \frac{DX^i}{ds} \equiv g_{ik} l^k \frac{DX^i}{ds} = 0. \tag{6. 7}$$

Da aus (6. 6) nach invarianter Ableitung nach s auch

$$g_{ik} X^k \frac{DX^i}{ds} = 0 \tag{6. 8}$$

folgt, steht der Vektor $\frac{DX^i}{ds}$ zu den Vektoren l^i und X^i orthogonal.

Betrachten wir nun den autoparallelen Unterraum $\mathfrak{U}_2$ mit dem Pol O, der C und $\bar{C}$ enthält und dessen autoparallelen Kurven durch O auch im Sinne der „D"-Übertragung des Linienelementraumes $\mathfrak{L}_n$ autoparallel sind. Zwei linear unabhängige Tangentenvektoren von $\mathfrak{U}_2$ sind:

$$l^i = B^i_\alpha l^\alpha, \quad X^i = B^i_\alpha X^\alpha. \tag{6. 9}$$

(In diesem zweiten Teil soll $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ immer die Zahlen 1, 2 und ϱ, σ, τ die Zahlen: 3, 4, ..., n durchlaufen. Die lateinischen Indizes durchlaufen, wie vorher, die Zahlen 1, 2, ..., n). Da $\frac{DX^i}{ds}$ zu den Flächenvektoren (6. 9) — wie das schon bemerkt wurde — orthogonal steht, ist er eine Linearkombination der Normalvektoren C^i_σ von $\mathfrak{U}_2$.

Verwenden wir also die Formel (4. 8) auf X^i, beachten wir ferner, daß wegen der Autoparallelität nach Korollar I. $\overset{*}{D} l^\alpha = 0$ ist, so wird

$$\frac{DX^i}{ds} = C^i_\sigma \Omega^{(\sigma)}_{\alpha\beta} X^\alpha \frac{du^\beta}{ds}, \tag{6. 10}$$

wo $\Omega^{(\sigma)}_{\alpha\beta}$ die Koeffizienten der zum $\mathfrak{U}_2$ gehörigen zweiten Grundform bedeuten. Aus (4. 9) folgt noch im Hinblick auf (6. 10):

$$\text{(6. 10a)} \qquad \frac{\overset{*}{D} X^\alpha}{ds} = 0,$$

d. h. der Vektor X^α ist längs C im Sinne der „$\overset{*}{D}$"-Übertragung parallel verschoben.

Wir gehen jetzt zur Berechnung der skalaren Form der Gleichung (6. 1) der autoparallelen Abweichung über. Aus (6. 8) folgt nach einer invarianten Ableitung nach s:

$$X_i \frac{D^2 X^i}{ds^2} = -g_{ik} \frac{DX^i}{ds} \frac{DX^k}{ds}, \qquad X_i \overset{\text{def}}{=} g_{ij} X^j.$$

Im Hinblick auf (6. 10) wird:

$$\text{(6. 11)} \qquad X_i \frac{D^2 X^i}{ds^2} = -\frac{1}{R_X^2}$$

mit der zum X^α gehörigen assoziierten Krümmung

$$\text{(6. 11a)} \qquad \frac{1}{R_X} = \sqrt{g_{ik} C^i_\varrho C^k_\sigma \Omega^{(\varrho)}_{\alpha\beta} \Omega^{(\sigma)}_{\gamma\delta} X^\alpha X^\gamma \frac{du^\beta}{ds} \frac{du^\delta}{ds}} \;{}^{5)}.$$

Substituieren wir nun ξ^i von der Gleichung (6. 5) in (6. 1), überschieben wir dann die erhaltene Relation mit X_i, beachten wir dann (6. 2), (6. 5), (6. 6) und (6. 11), so wird:

$$\text{(6. 12)} \qquad \frac{d^2 \xi}{ds^2} + \Gamma^* \frac{d\xi}{ds} + \left(R^* - \frac{1}{R_X^2}\right) \xi = 0,$$

wo Γ^* und R^* durch (3. 16a) und (3. 16b) von [5] angegeben sind, d. h. es ist:

$$\Gamma^*(x, x', X) \overset{\text{def}}{=} L^{*i}_{j\ t}\|_k l^j l^t X_i X^k + 2\Omega^*_{oik} X^i X^k,$$

$$R^*(x, x', X) \overset{\text{def}}{=} (\bar{R}_{oioj} + 2\Omega^*_{oij}|_o) X^i X^j + 2L^{*i}_{j\ t}\|_k \Omega^{*k}_{o\ r} l^j l^t X_i X^r.$$

Die Gleichung (6. 12) *ist die invariante Form der autoparallelen Abweichung, die im n-dimensionalen Fall auch von den durch O gehenden vorgegebenen autoparallelen* $\mathfrak{U}_2$ *abhängt.*

Die Abhängigkeit von $\mathfrak{U}_2$ kommt in der Existenz des Gliedes $\frac{1}{R_X^2}$ zum Ausdruck.

Für die durch (6. 11a) angegebene Größe kann die folgende geometrische Deutung gegeben werden: Es sei C^* eine Kurve durch dem Punkte O und mit den Gleichungen

$$x^{*i} = x^{*i}(s)$$

[5]) Die Summation über ϱ, σ geht selbstverständlich von 3 bis n.

die aber auf das Richtungsfeld $v^i(s)$ von C bezogen ist. C^* ist also nicht die Mannigfaltigkeit ihrer tangenten Linienelemente, z. B. ist die Bogenlänge von C^*:

$$\sigma^* = \int_0^{s_0} \left(g_{ij}(x^*(s), v(s)) \frac{dx^{*i}}{ds} \frac{dx^{*j}}{ds} \right)^{\frac{1}{2}} ds.$$

Der Punkt O soll den Parameterwert $s=0$ representieren und im Punkte O sollen für den Tangentenvektor von C^* die Formeln

$$(6.13) \qquad \left.\frac{dx^{*i}}{ds}\right|_{s=0} = X^i(0). \quad \left.\frac{D^2 x^{*i}}{ds^2}\right|_{s=0} = \left.\frac{DX^i}{ds}\right|_{s=0}$$

bestehen. C^* ist also zu C orthogonal. Verwenden wir nun auf C^* die Formeln (4. 2), so wird nach (6. 13):

$$(6.14) \qquad \left.\frac{DX^i}{ds}\right|_{s=0} = \frac{1}{R^*} \eta_i^*(x^*, v)\Big|_{s=0}.$$

Aus dieser Formel folgt nun, daß

$$\left.\frac{1}{R^*}\right|_{s=0} = \left(g_{ij}(x^* v) \frac{DX^i}{ds} \frac{DX^j}{ds} \right)^{\frac{1}{2}}\Big|_{s=0}$$

ist. Auf Grund der Formeln (6. 10) und (6. 11a) folgt wegen $x^{*i}(0) = x^i(0)$:

$$\left.\frac{1}{R^*}\right|_{s=0} = \left.\frac{1}{R_X}\right|_{s=0}.$$

$\frac{1}{R_X}$ ist also im Punkte O die erste Krümmung von C^*.

§ 7. Über die Existenz der Hüllkurve der autoparallelen Kurven

Ein Kriterium für die Existenz der Hüllkurve der aus einem Punkte O ausgehenden autoparallelen Kurven kann auf Grund der Gleichung (6. 12) ebenso abgeleitet werden, wie im Paragraphen 4 unseres Aufsatzes [5]. Ist $\xi(s)$ die Lösung von (6. 12) mit $\xi(0)=0$, so schneiden sich die unendlich benachbarten autoparallelen Kurven außer in ihrem Ausgangspunkt O dann und nur dann, falls noch für ein $s_0 \neq 0$, $\xi(s_0)=0$ ist. Es ist nämlich nach (6. 5) in diesem Falle auch $\xi^i(s_0)=0$, und somit wird für einen geeigneten Parameterwert σ_0:

$$(7.1) \qquad \psi^i(\sigma_0) \equiv x^i(s_0) + \xi^i(s_0) = x^i(s_0).$$

Nach der Transformation

$$(7.2) \qquad \xi(s) = e^{-\frac{1}{2}\int \Gamma^* ds} \eta(s)$$

geht (6. 12) in

$$\frac{d^2\eta}{ds^2} + \left(R^* - \frac{1}{R_X^2} - \frac{1}{2}\frac{d\Gamma^*}{ds} - \frac{1}{4}\Gamma^{*2} \right) \eta = 0$$

über. Offenbar stimmen die Nullstellen von $\xi(s)$ und $\eta(s)$ überein. Unsere letzte Formel ist vollständig analog zur Formel (4. 2) unseres Aufsatzes [5], nur der Koeffizient von η ist verschieden. Dementsprechend gilt jetzt der folgende

Satz III. *Besteht für den Skalar*

$$K\left(x, \frac{dx}{ds}\right) \stackrel{\text{def}}{=} R^* - \frac{1}{R_X^2} - \frac{1}{2}\frac{d\Gamma^*}{ds} - \frac{1}{4}\Gamma^{*2} \tag{7. 3}$$

längs jeder autoparallelen Linie $C\colon x^i = x^i(s)$ *die Ungleichung*

$$K\left(x, \frac{dx}{ds}\right) > \frac{1}{A^2}, \quad A = konst \neq 0, \tag{7. 4}$$

so haben die durch den Punkt O gehenden und auf einem $\mathfrak{U}_2$ *liegenden autoparallelen Kurven eine Hüllkurve.*

Beweis. Ebenso wie im Beweis des Satzes 4 unserer Arbeit [5] (vgl. [5], Seite 115—116) kann gezeigt werden, daß aus der Bedingung (7. 4) die Existenz eines Parameterwertes $s_0 < \pi A$ folgt, für den $\eta(s_0) = 0$, und es wird somit auf Grund von (7. 2) und (6. 5) auch (7. 1) bestehen. Die unendlich benachbarten Kurven C und $\bar{C}$ schneiden sich also außer $x^i(0)$ im Punkte $x^i(s_0)$.

Nun bilden die durch O gehenden und auf $\mathfrak{U}_2$ liegenden autoparallelen Kurven eine einparametrige Kurvenschar, wie das aus der charakteristischen Differentialgleichung der autoparallelen Kurven gefolgert werden kann[6]). Aus der Theorie der einparametrigen Kurvenscharen ist nun bekannt, daß wenn der Limespunkt der Schnittpunkte sich schneidenden unendlich benachbarten Kurven C und $\bar{C}$, falls $\bar{C} \to C$, existiert, liegt immer auf der Hüllkurve. Die Hüllkurve besteht dann eben aus diesen Limespunkten, falls C die durch O gehenden Kurven auf $\mathfrak{U}_2$ durchläuft; die Existenz des Limespunktes auf C ist wegen $s_0 < \pi A$ gesichert. (Vgl. [11] Kapitel VIII. insbesondere S. 44—47.). Die Hüllkurve kann selbstverständlich auch ausgeartet sein, z. B.: sie kann auch ein Punkt sein, nämlich der Punkt $x^i(s_0)$. Damit haben wir den Satz III. bewiesen.

Zum Schluß wollen wir nochmals darauf hinweisen, daß die Hüllkurve, für deren Existenz wir eine Bedingung bestimmt haben, im allgemeinen von dem gewählten autoparallelen Unterraum $\mathfrak{U}_2$ abhängig ist. Das zeigt sich auch in der Bedingung (7. 4), da der Skalar K nach (7. 3) auch von $\frac{1}{R_X}$ abhängig ist. Die Hüllkurve selbst liegt auch auf $\mathfrak{U}_2$.

Haben die von O ausgehenden autoparallelen Kurven eine Hüllfläche, so ist die auf $\mathfrak{U}_2$ liegende Hüllkurve offenbar eben den Schnitt der Hüllfläche mit $\mathfrak{U}_2$. Daraus folgt die Richtigkeit des folgenden Korollars:

Korollar III. *Ist die Ungleichung* (7. 4) *für jeden autoparallelen Unterraum* $\mathfrak{U}_2$ *der den Pol O hat, richtig, so haben die durch O gehenden autoparallelen Kurven eine Hüllfläche.*

---

[6]) Ein Punkt und eine Richtung bestimmt eine autoparallele Kurve C; die Richtung bestimmt aber jetzt nur einen Parameter, da C auf dem zweidimensionalen Unterraum $\mathfrak{U}_2$ liegt.

Literatur

[1] W. Blaschke, *Vorlesungen über Differentialgeometrie.* I. dritte, erweiterte Auflage (Berlin, 1930).
[2] E. T. Davies, Subspaces of a Finsler space, *Proc. London Math. Soc.*, (2) **49** (1947), 19—39.
[3] S. Kikuchi, On the theory of subspace in a Finsler space, *Tensor*, (new series) **2** (1952), 67—79.
[4] A. Moór, Entwicklung einer Geometrie der allgemeinen metrischen Linienelementräume, *Acta Sci. Math.*, **17** (1956), 85—120.
[5] A. Moór, Über die autoparallele Abweichung in allgemeinen metrischen Linienelementräumen, *Publ. Math. Debrecen*, **5** (1957), 102—118.
[6] A. Moór, Eine Verallgemeinerung der metrischen Übertragung in allgemeinen metrischen Räumen, *Publ. Math. Debrecen*, **10** (1963), 145—150.
[7] S. B. Myers, Riemannian manifolds in the large, *Duke Math. J.* **1** (1935), 39—49.
[8] H. Rund, The scalar form of Jacobi's equations in the calculus of variations, *Annali di Math.*, (4) **35** (1953), 183—202.
[9] H. Rund, Hypersurfaces of a Finsler space, *Canad. J. Math.* **8** (1956), 487—503.
[10] H. Rund, *The differential geometry of Finsler spaces.* (Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1959).
[11] G. Julia, *Cours de géométrie infinitésimale.* Troisième fascicule. Deuxième édition entièrement refondue (Paris, 1955).

(Eingegangen am 16. April 1964)

Sur les contractions de l'espace de Hilbert. IX

Factorisations de la fonction caractéristique. Sous-espaces invariants

Par BÉLA SZ.-NAGY à Szeged et CIPRIAN FOIAŞ à Bucarest

Dans cette Note on déterminera la relation qui existe entre les sous-espaces invariants pour une contraction T de l'espace de Hilbert $\mathfrak{H}$ et les factorisations de la fonction caractéristique de T. Grâce à cette relation, le problème de trouver les sous-espaces invariants pour T se ramène au problème de trouver les factorisations d'une fonction analytique contractive, à valeurs opérateurs, en produit de deux fonctions de même type, factorisations qui sont d'ailleurs assujetties encore à une condition additionnelle.

On étudiera en particulier le cas où la fonction caractéristique de T est une fonction „*-extérieure". Pour telles fonctions, à valeurs opérateurs, on obtient les factorisations qui correspondent aux factorisations de type suivant dans le cas numérique:

$$\exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+\lambda}{e^{it}-\lambda}\log|\Theta(e^{it})|\,dt\right)=$$

$$=\exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_\alpha\frac{e^{it}+\lambda}{e^{it}-\lambda}\log|\Theta(e^{it})|\,dt\right)\cdot\exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha'}\frac{e^{it}+\lambda}{e^{it}-\lambda}\log|\Theta(e^{it})|\,dt\right)$$

où α est un sous-ensemble borélien de $[0, 2\pi)$, et $\alpha' = [0, 2\pi)-\alpha$. De plus, on montrera que les fonctions extérieures sont caractérisées, à un facteur isométrique constant près, par la relation

$$-\infty<\log\|\Theta(0)f\| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\|\Theta(e^{it})f\|\,dt,$$

valable pour tout vecteur f tel que $\Theta(\lambda)f\not\equiv 0$. Cela constitue une généralisation naturelle de la caractérisation, due à BEURLING, des fonctions extérieures numériques.[1])

Ces résultats nous permettent de construire toute une variété de sous-espaces invariants distincts pour une contraction T telle que $T^n f$ et $T^{*n} f$ ne tendent pas

---

[1]) *Cf.* [6], p. 62.

vers 0 pour $f \neq 0$. D'ailleurs ces sous-espaces invariants sont en relation serrée avec les sous-espaces spectraux de la dilatation unitaire minimum de T.

Il est manifeste que dans ces considérations on peut se borner au cas où la contraction T est complètement non-unitaire.

Des relations entre les sous-espaces invariants des opérateurs et les factorisations des fonctions caractéristiques correspondantes ont été connues depuis les travaux de LIVŠITZ, POTAPOV, ŠMULYAN, BRODSKY et d'autres, sur les fonctions caractéristiques d'opérateurs; *cf.* la littérature citée dans [3] et [VIII]. Toutefois, des conditions dans lesquelles une factorisation de la fonction caractéristique entraîne l'existence d'un sous-espace invariant non banal [2]) pour l'opérateur donné semblent avoir été trouvées seulement dans certains cas particuliers, notamment par ŠMULYAN [4].[3])

Une partie des résultats de cette Note a été annoncée dans [2].

1. Considérations d'ordre géométrique

1. Soit T une contraction de l'espace de Hilbert $\mathfrak{H}$ $(\neq \{0\})$. [4]) Soit U la dilatation unitaire minimum de T, opérant dans un espace de Hilbert $\mathfrak{K}$ tel que

$$\mathfrak{K} = \bigvee_{n=-\infty}^{\infty} U^n \mathfrak{H} \qquad \text{(condition de minimalité).}$$

Posons

$$\mathfrak{K}_+ = \bigvee_{n=0}^{\infty} U^n \mathfrak{H};$$

$\mathfrak{K}_+$ est invariant pour U, donc

$$U_+ = U \,|\, \mathfrak{K}_+$$

est une transformation isométrique de l'espace $\mathfrak{K}_+$ en soi-même.

On sait que

$$\mathfrak{L} = \overline{(U-T)\mathfrak{H}} \quad \text{et} \quad \mathfrak{L}_* = \overline{(I-UT^*)\mathfrak{H}}$$

sont des sous-espaces ambulants pour U, contenus dans $\mathfrak{K}_+$, et qu'on a

$$\mathfrak{K} = \ldots \oplus U^{-2}\mathfrak{L}_* \oplus U^{-1}\mathfrak{L}_* \oplus \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{L} \oplus U\mathfrak{L} \oplus U^2\mathfrak{L} \oplus \ldots \tag{1.1}$$

(*cf.* [V], th. 1).

---

[2]) C'est-à-dire différent de $\{0\}$ et de l'espace entier.

[3]) Notons que les cas envisagés dans [4] ne sont pas englobés dans notre théorème général (théorème 1). En effet, cet auteur envisage des opérateurs bornés $A = R+iQ$ avec R, Q autoadjoints dont Q est de rang fini, tandis que notre étude (transposée par une transformation cayleyenne inverse) concerne les opérateurs dissipatifs maximum, en particulier les opérateurs de la forme $A = R+iQ$ où la condition que Q soit de rang fini est remplacée par la condition $Q \geqq O$. Il convient de remarquer ici que la définition de la fonction caractéristique d'une contraction, telle que nous l'utilisons dans nos recherches, apparaît aussi chez ŠMULYAN [5]. Toutefois, dans nos recherches la notion de la fonction caractéristique d'une contraction apparaît d'une façon naturelle comme une conséquence, par des représentations de Fourier, de la théorie des dilatations unitaires. C'est de la même façon naturelle que nous obtenons les relations entre les sous-espaces invariants et les factorisations de la fonction caractéristique.

[4]) Tous les espaces de Hilbert que nous allons considérer seront supposés d'être séparables.

On sait aussi ($cf.$ [VIII], (3. 4) et (3. 22)) que, en définissant le sous-espace $\mathfrak{K}_0$ de $\mathfrak{K}$ par la formule

$$\mathfrak{K} = M(\mathfrak{L}_*) \oplus \mathfrak{K}_0;\text{[5]} \tag{1.2}$$

$\mathfrak{K}_0$ est compris dans $\mathfrak{K}_+$, réduit U_+ (et à fortiori U) à une transformation unitaire, et qu'on a

$$\mathfrak{K}_+ = M_+(\mathfrak{L}_*) \oplus \mathfrak{K}_0.\text{[6]} \tag{1.3}$$

De (1. 1) il s'ensuit

$$\mathfrak{K}_+ = \mathfrak{H} \oplus M_+(\mathfrak{L}) \qquad (cf.\ [\text{VIII}],\ (3.21)), \tag{1.4}$$

donc

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{K}_+ \ominus M_+(\mathfrak{L}) = [M_+(\mathfrak{L}_*) \oplus \mathfrak{K}_0] \ominus M_+(\mathfrak{L}). \tag{1.5}$$

Comme $M_+(\mathfrak{L})$ est invariant pour U_+, son complémentaire dans $\mathfrak{K}_+$, c'est-à-dire $\mathfrak{H}$, est invariant pour U_+^*. Vu que U_+ est une dilatation de T, on a

$$T^* = U_+^* \,|\, \mathfrak{H} \qquad (cf.\ [\text{VIII}],\ (3.28)). \tag{1.6}$$

Ces relations sont valables pour une contraction T quelconque. Lorsque T est complètement non-unitaire, on a de plus

$$\mathfrak{K} = \overline{M(\mathfrak{L}) + M(\mathfrak{L}_*)} \qquad (cf.\ [\text{V}],\ \text{p. } 121). \tag{1.7}$$

2. Après ces préliminaires envisageons le cas où il existe dans $\mathfrak{H}$ un sous-espace $\mathfrak{H}_1$, invariant pour T; $\mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}_1$ est alors invariant pour T^* et, en vertu de (1. 6), aussi pour U_+^*. Par conséquent, le complémentaire de $\mathfrak{H}_2$ dans $\mathfrak{K}_+$, c'est-à-dire

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{K}_+ \ominus \mathfrak{H}_2, \tag{1.8}$$

est invariant pour U_+. Soit

$$\mathfrak{N} = M_+(\mathfrak{F}) \oplus \mathfrak{K}_1 \tag{1.9}$$

la décomposition de Wold correspondant à la transformation isométrique U_+ de $\mathfrak{N}$; on a notamment

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{N} \ominus U_+ \mathfrak{N} \quad \text{et} \quad \mathfrak{K}_1 = \bigcap_0^\infty U_+^n \mathfrak{N}; \tag{1.10}$$

$\mathfrak{K}_1$ réduit U_+ à une transformation unitaire.

Comme $\mathfrak{N} \subseteqq \mathfrak{K}_+$ et par conséquent $U_+^n \mathfrak{N} \subseteqq U_+^n \mathfrak{K}_+$ $(n \geqq 0)$, on a, vu (1. 3),

$$\mathfrak{K}_1 = \bigcap_0^\infty U_+^n \mathfrak{N} \subseteqq \bigcap_0^\infty U_+^n \mathfrak{K}_+ = \mathfrak{K}_0. \tag{1.11}$$

---

[5]) Pour un sous-espace $\mathfrak{G}$ d'un espace de Hilbert, ambulant pour une transformation isométrique V dans $\mathfrak{G}$, on désignera par $M_+(\mathfrak{G})$ la somme orthogonale des sous-espaces $V^n\mathfrak{G}$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$. Lorsque V est même unitaire, on désignera par $M(\mathfrak{G})$ la somme orthogonale des sous-espaces $V^n\mathfrak{G}$ $(-\infty<n<\infty)$.

[6]) C'est la décomposition canonique (due à Wold) de $\mathfrak{K}_+$ par rapport à la transformation isométrique U_+; décomposition en somme orthogonale de deux sous-espaces, dans l'un desquels U_+ est une translation unilatérale et dans l'autre une transformation unitaire:

$$\mathfrak{L}_* = \mathfrak{K}_+ \ominus U_+ \mathfrak{K}_+ \quad \text{et} \quad \mathfrak{K}_0 = \bigcap_0^\infty U_+^n \mathfrak{K}_+.$$

On peut donc poser

$$\mathfrak{K}_0 = \mathfrak{K}_1 \oplus \mathfrak{K}_2; \tag{1.12}$$

$\mathfrak{K}_2$ réduit U_+ aussi à une transformation unitaire. De (1. 3), (1. 8) et (1. 9) on obtient

$$\mathfrak{H}_2 = \mathfrak{K}_+ \ominus \mathfrak{R} = [M_+(\mathfrak{L}_*) \oplus \mathfrak{K}_0] \ominus [M_+(\mathfrak{F}) \oplus \mathfrak{K}_1],$$

d'où

$$\mathfrak{H}_2 = [M_+(\mathfrak{L}_*) \oplus \mathfrak{K}_2] \ominus M_+(\mathfrak{F}). \tag{1.13}$$

Cette représentation de $\mathfrak{H}_2$, ensemble avec la représentation (1. 5) de $\mathfrak{H}$, entraînent:

$$\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}_2 = \{[M_+(\mathfrak{L}_*) \oplus \mathfrak{K}_0] \ominus M_+(\mathfrak{L})\} \ominus \{[M_+(\mathfrak{L}_*) \oplus \mathfrak{K}_2] \ominus M_+(\mathfrak{F})\},$$

d'où

$$\mathfrak{H}_1 = [M_+(\mathfrak{F}) \oplus \mathfrak{K}_1] \ominus M_+(\mathfrak{L}) = \mathfrak{R} \ominus M_+(\mathfrak{L}). \tag{1.14}$$

Les formules (1. 13) et (1. 14) mettent en évidence que

$$M_+(\mathfrak{F}) \subseteqq M_+(\mathfrak{L}_*) \oplus \mathfrak{K}_2 \quad \text{et} \quad M_+(\mathfrak{L}) \subseteqq M_+(\mathfrak{F}) \oplus \mathfrak{K}_1,$$

d'où

$$U^{-n} M_+(\mathfrak{F}) \subseteqq U^{-n} M_+(\mathfrak{L}_*) \oplus \mathfrak{K}_2, \quad U^{-n} M_+(\mathfrak{L}) \subseteqq U^{-n} M_+(\mathfrak{F}) \oplus \mathfrak{K}_1 \qquad (n=1, 2, \ldots);$$

en prenant les sommes par rapport à n il résulte

$$M(\mathfrak{F}) \subseteqq M(\mathfrak{L}_*) \oplus \mathfrak{K}_2, \quad M(\mathfrak{L}) \subseteqq M(\mathfrak{F}) \oplus \mathfrak{K}_1. \tag{1.15}$$

De la dernière relation il s'ensuit, vu aussi que $\mathfrak{K}_1 \subseteqq \mathfrak{K}_0 \perp M(\mathfrak{L}_*)$,

$$M(\mathfrak{L}) + M(\mathfrak{L}_*) \subseteqq \overline{M(\mathfrak{F}) + M(\mathfrak{L}_*)} \oplus \mathfrak{K}_1;$$

en vertu de (1. 7) cela entraîne

$$\mathfrak{K} = \overline{M(\mathfrak{F}) + M(\mathfrak{L}_*)} \oplus \mathfrak{K}_1,$$

donc, vu (1. 2) et (1. 12),

$$\mathfrak{K}_2 = \overline{M(\mathfrak{F}) + M(\mathfrak{L}_*)} \ominus M(\mathfrak{L}_*). \tag{1.16}$$

Lorsque, en particulier, $\mathfrak{F} = \mathfrak{L}$, (1. 7) et (1. 16) entraînent $\mathfrak{K}_0 = \mathfrak{K}_2$, donc $\mathfrak{K}_1 = \{0\}$; vu (1. 14) il en résulte que $\mathfrak{H}_1 = \{0\}$. D'autre part, lorsque $\mathfrak{F} = \mathfrak{L}_*$, on a $\mathfrak{K}_2 = \{0\}$ en vertu de (1. 16); vu (1. 13) il en résulte que $\mathfrak{H}_2 = \{0\}$.

Ainsi, si l'espace invariant $\mathfrak{H}_1$ est *non banal*, ce qu'on supposera dans la suite, on a nécessairement

$$\mathfrak{F} \neq \mathfrak{L} \quad \text{et} \quad \mathfrak{F} \neq \mathfrak{L}_*. \tag{1.17}$$

Il convient de remarquer ici qu'on a aussi $\mathfrak{L} \neq \mathfrak{L}_*$, voire même

$$\mathfrak{L} \cap \mathfrak{L}_* = \{0\}. \tag{1.18}$$

En effet, pour $f \in \mathfrak{L} \cap \mathfrak{L}_*$ on a $U^n f \perp \mathfrak{H}$ $(n=0, \pm 1, \ldots)$, conséquence de (1. 1). Ainsi, $f \perp U^{-n}\mathfrak{H}$ $(n=0, \pm 1, \ldots)$ ce qui entraîne $f=0$ en vertu de la condition de minimalité pour $\mathfrak{K}$.

Revenons à la définition de $\mathfrak{F}$ par (1. 10). Comme $\mathfrak{N}\subseteqq\mathfrak{K}_+$ et $\mathfrak{N}\supseteqq M_+(\mathfrak{L})$ (*cf.* (1. 14)), on a, eu égard aussi à (1. 4),

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{N}\ominus U_+\mathfrak{N} \subseteqq \mathfrak{K}_+\ominus U_+ M_+(\mathfrak{L}) = [\mathfrak{H}\oplus M_+(\mathfrak{L})]\ominus U_+ M_+(\mathfrak{L}),$$

donc

$$\mathfrak{F}\subseteqq\mathfrak{H}\oplus\mathfrak{L}. \tag{1.19}$$

3. Désignons par $P^{\mathfrak{L}_*}$, $P^{\mathfrak{F}}$ les projections (dans $\mathfrak{K}$) sur $M(\mathfrak{L}_*)$ et $M(\mathfrak{F})$, selon les cas, et par $P_{\mathfrak{K}_i}$ $(i=0, 1, 2)$ la projection sur $\mathfrak{K}_i$. Comme tous les sous-espaces en question réduisent U, les projections correspondantes permutent à U.

Par la définition (1. 2) de $\mathfrak{K}_0$, on a

$$P_{\mathfrak{K}_0} = I-P^{\mathfrak{L}_*}, \tag{1.20a}$$

d'où, par (1. 7),

$$\mathfrak{K}_0 = \overline{(I-P^{\mathfrak{L}_*})M(\mathfrak{L})}. \tag{1.20b}$$

Montrons qu'on a aussi

$$P_{\mathfrak{K}_1}f = (I-P^{\mathfrak{F}})f \quad \text{pour} \quad f\in M(\mathfrak{L}), \tag{1.21a}$$

$$\mathfrak{K}_1 = \overline{(I-P^{\mathfrak{F}})M(\mathfrak{L})}, \tag{1.21b}$$

$$P_{\mathfrak{K}_2}f = (I-P^{\mathfrak{L}_*})f \quad \text{pour} \quad f\in M(\mathfrak{F}), \tag{1.22a}$$

$$\mathfrak{K}_2 = \overline{(I-P^{\mathfrak{L}_*})M(\mathfrak{F})}. \tag{1.22b}$$

En effet, (1. 21a) et (1. 22a) découlent immédiatement de (1. 15), et (1. 22b) découle de (1. 16). Reste à prouver (1. 21b). En vertu de (1. 15) tout $f\in M(\mathfrak{F})$ et tout $l\in M(\mathfrak{L})$ peuvent être décomposés de la façon suivante:

$$f = P^{\mathfrak{L}_*}f+P_{\mathfrak{K}_2}f, \quad l = P^{\mathfrak{F}}l+P_{\mathfrak{K}_1}l. \tag{1.23}$$

Choisissons en particulier $f=P^{\mathfrak{F}}l$. Les deux relations (1. 23) fournissent alors

$$l = P^{\mathfrak{L}_*}P^{\mathfrak{F}}l+P_{\mathfrak{K}_1}l+P_{\mathfrak{K}_2}P^{\mathfrak{F}}l \qquad (l\in M(\mathfrak{L})). \tag{1.24}$$

Le premier terme au second membre étant un élément de $M(\mathfrak{L}_*)$, et la somme des deux autres termes un élément de $\mathfrak{K}_1\oplus\mathfrak{K}_2 = \mathfrak{K}_0$, il s'ensuit [7])

$$\left.\begin{aligned} P^{\mathfrak{L}_*}l &= P^{\mathfrak{L}_*}P^{\mathfrak{F}}l && (1.25)\\ P_{\mathfrak{K}_0}l &= P_{\mathfrak{K}_1}l+P_{\mathfrak{K}_2}P^{\mathfrak{F}}l && (1.26)\end{aligned}\right\} \quad \text{pour} \quad l\in M(\mathfrak{L}).$$

Puisque $\overline{P_{\mathfrak{K}_0}M(\mathfrak{L})}=\mathfrak{K}_0$ (conséquence de (1. 20)) et que $\mathfrak{K}_0=\mathfrak{K}_1\oplus\mathfrak{K}_2$, (1. 26) entraîne

$$\overline{P_{\mathfrak{K}_1}M(\mathfrak{L})} = \mathfrak{K}_1 \quad \text{et} \quad \overline{P_{\mathfrak{K}_2}P^{\mathfrak{F}}M(\mathfrak{L})} = \mathfrak{K}_2; \tag{1.27}$$

la première de ces relations et (1. 21a) fournissent (1. 21b).

Ainsi, toutes les relations (1. 20)—(1. 22) ont été prouvées.

---

[7]) Notons aussi que $M(\mathfrak{L}_*)\perp\mathfrak{K}_0$.

(1. 1) met en évidence que $U^n\mathfrak{L} \perp U^{-m}\mathfrak{L}_*$ pour $n \geqq 0$, $m \geqq 1$, d'où

$$P^{\mathfrak{L}_*}M_+(\mathfrak{L}) \subseteqq M_+(\mathfrak{L}_*) \qquad (cf.\ [\mathrm{VIII}],\ n^\circ\ 3). \tag{1.28}$$

Vu (1. 19), (1. 1) met en évidence aussi que $\mathfrak{F}$ est orthogonal à $U^\nu\mathfrak{L}$ et à $U^{-\nu}\mathfrak{L}_*$ pour $\nu = 1, 2, \ldots$, et par conséquent

$$U^n\mathfrak{L} \perp U^{-m}\mathfrak{F} \quad \text{et} \quad U^n\mathfrak{F} \perp U^{-m}\mathfrak{L}_* \quad \text{pour} \quad n \geqq 0,\ m \geqq 1.$$

Cela entraîne

$$P^{\mathfrak{F}}M_+(\mathfrak{L}) \subseteqq M_+(\mathfrak{F}) \quad \text{et} \quad P^{\mathfrak{L}_*}M_+(\mathfrak{F}) \subseteqq M_+(\mathfrak{L}_*). \tag{1.29}$$

2. Un lemme sur les représentations de Fourier

Commençons par introduire une notation. Si U est une transformation unitaire dans un espace de Hilbert (séparable) $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{A}$ est un sous-espace de $\mathfrak{R}$, ambulant pour U, convenons de désigner par $\Phi^{\mathfrak{A}}$ l'application de $M(\mathfrak{A})$ sur $L^2(\mathfrak{A})$, [8]) définie par

$$\Phi^{\mathfrak{A}} \sum_{-\infty}^{\infty} U^n a_n = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{int} a_n \qquad (a_n \in \mathfrak{A},\ \sum \|a_n\|^2 < \infty).$$

Cette application, appelée *représentation de Fourier de* $M(\mathfrak{A})$, est *unitaire* et on a

$$\Phi^{\mathfrak{A}} Uh = e^{it}\Phi^{\mathfrak{A}} h \quad \text{pour} \quad h \in M(\mathfrak{A}). \tag{2.1}$$

La restriction de $\Phi^{\mathfrak{A}}$ à $M_+(\mathfrak{A})$, désignée par $\Phi^{\mathfrak{A}}_+$, applique $M_+(\mathfrak{A})$ unitairement sur le sous-espace $H^2(\mathfrak{A})$ de $L^2(\mathfrak{A})$, constitué des fonctions de type $u(e^{it}) = \sum_0^\infty e^{int}a_n$; telle fonction peut être considérée aussi comme limite radiale forte p. p. de la fonction analytique $u(\lambda) = \sum_0^\infty \lambda^n a_n$ $(|\lambda| < 1)$; *cf.* [VIII], n° 1.

Nous allons démontrer le suivant

Lemme. *Soient U et U' deux transformations unitaires, dans les espaces de Hilbert $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{R}'$, selon les cas, et soient $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{A}'$ des sous-espaces ambulants pour U et U' ($\mathfrak{A} \subseteqq \mathfrak{R}$, $\mathfrak{A}' \subseteqq \mathfrak{R}'$). Soit Q une contraction de l'espace $\mathfrak{R}$ dans l'espace $\mathfrak{R}'$, telle que*

$$QUk = U'Qk \qquad (k \in \mathfrak{R}) \tag{2.2}$$

et

$$QM_+(\mathfrak{A}) \subseteqq M_+(\mathfrak{A}'). \text{ [9])} \tag{2.3}$$

Il existe alors une fonction analytique contractive $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \Theta(\lambda)\}$, [10]) *telle que pour tout* $h \in M(\mathfrak{A})$ *on ait*

$$\Phi^{\mathfrak{A}'}(Qh) = \Theta(e^{it})h(t) \text{ [11])} \quad où \quad h(t) = \Phi^{\mathfrak{A}}h. \tag{2.4}$$

---

[8]) L'espace L^2 des fonctions définies sur $(0, 2\pi)$, à valeurs vecteurs dans $\mathfrak{A}$, l'intégration étant prise par rapport à la mesure normée $dt/2\pi$.

[9]) (2. 2) et (2. 3) entraînent évidemment $QM(\mathfrak{A}) \subseteqq M(\mathfrak{A}')$.

[10]) *Cf.* [VIII], n° 1.

[11]) $\Theta(e^{it}) = \lim_{r\to 1} \Theta(re^{it})$ p. p., *cf.* [VIII], n° 1.

Pour que cette fonction analytique contractive soit

a) *pure, c'est-à-dire que* $\|\Theta(0)a\| < \|a\|$ *pour tout* $a \in \mathfrak{A}, a \neq 0$;

b) *une constante unitaire;*

c) *intérieure, c'est-à-dire que* $\Theta(e^{it})$ *est p. p. une transformation isométrique de* $\mathfrak{A}$ *dans* $\mathfrak{A}'$,

d) *extérieure, c'est-à-dire que* $\overline{\Theta H^2(\mathfrak{A})} = H^2(\mathfrak{A}')$ [*ou strictement extérieure, c'est-à-dire que* $\Theta H^2(\mathfrak{A}) = H^2(\mathfrak{A}')$],

il faut et il suffit qu'on ait, selon les cas,

a) $\|Qa\| < \|a\|$ *pour tout* $a \in \mathfrak{A}, a \neq 0$, *tel que* $Qa \in \mathfrak{A}'$;

b) $Q|\mathfrak{A}$ *applique* $\mathfrak{A}$ *unitairement sur* $\mathfrak{A}'$;

c) $Q|M_+(\mathfrak{A})$ *applique* $M_+(\mathfrak{A})$ *isométriquement dans* $M_+(\mathfrak{A}')$;

d) $\overline{QM_+(\mathfrak{A})} = M_+(\mathfrak{A}')$ [*ou* $QM_+(\mathfrak{A}) = M_+(\mathfrak{A}')$].

Démonstration. En vertu de (2. 3) on a en particulier pour $a \in \mathfrak{A}$:

$$Qa = \sum_0^\infty U^n a'_n \quad \text{avec} \quad a'_n \in \mathfrak{A}', \quad \sum \|a'_n\|^2 = \|Qa\|^2 \leqq \|a\|^2.$$

En posant $a'_n = \Theta_n a$ on aura défini une suite de transformations linéaires bornées Θ_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, notamment des contractions de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{A}'$.

Ainsi, on aura

$$\Phi^{\mathfrak{A}'} Qa = v_a(t) \quad \text{où} \quad v_a(t) = \sum_0^\infty e^{int}(\Theta_n a).\,^{12)}$$

Grâce à (2. 2) cela entraîne, vu aussi (2. 1),

$$\Phi^{\mathfrak{A}'} Q\varphi(U)a = \Phi^{\mathfrak{A}'}\varphi(U')Qa = \varphi(e^{it})\Phi^{\mathfrak{A}'}Qa = \varphi(e^{it})v_a(t)$$

pour tout polynome trigonométrique $\varphi(e^{it})$ à coefficients numériques, d'où

$$\|\varphi(U)a\|_{\mathfrak{R}}^2 \geqq \|Q\varphi(U)a\|_{\mathfrak{R}'}^2 = \|\Phi^{\mathfrak{A}'} Q\varphi(U)a\|_{L^2(\mathfrak{A}')}^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\varphi(e^{it})|^2 \|v_a(t)\|_{\mathfrak{A}'}^2\, dt.$$

D'autre part, on a

$$\|\varphi(U)a\|_{\mathfrak{R}}^2 = \|\Phi^{\mathfrak{A}}\varphi(U)a\|_{L^2(\mathfrak{A})}^2 =^{13)} \|\varphi(e^{it})\Phi^{\mathfrak{A}}a\|_{L^2(\mathfrak{A})}^2 = \|\varphi(e^{it})a\|_{L^2(\mathfrak{A})}^2 =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\varphi(e^{it})|^2\, dt \cdot \|a\|_{\mathfrak{A}}^2.$$

En comparant ces deux résultats, on obtient

$$\int_0^{2\pi} |\varphi(e^{it})|^2 \|v_a(t)\|_{\mathfrak{A}'}^2\, dt \leqq \int_0^{2\pi} |\varphi(e^{it})|^2\, dt \cdot \|a\|_{\mathfrak{A}}^2.$$

[12]) Convergence dans $L^2(\mathfrak{A}')$.

[13]) On fait ici usage de (2. 1).

Cette inégalité s'étend, par le théorème d'approximation de Weierstrass, à toutes les fonctions continues $\varrho(t) \geqq 0$, de période 2π, c'est-à-dire qu'on aura aussi

$$\int_0^{2\pi} \varrho(t) \|v_a(t)\|_{\mathfrak{A}'}^2 \, dt \leqq \int_0^{2\pi} \varrho(t)\, dt \cdot \|a\|_{\mathfrak{A}}^2 .$$

Faisant ensuite usage du théorème de Lebesgue sur l'intégration terme-à-terme des suites, on étend cette inégalité à toutes les fonctions $\varrho(t) \geqq 0$, mesurables et bornées dans $(0, 2\pi)$. En choisissant pour $\varrho(t)$ en particulier la fonction caractéristique, divisée par δ, d'un intervalle $(\tau, \tau+\delta)$, et en faisant δ tendre vers 0, on obtient que

$$\|v_a(t)\|_{\mathfrak{A}'} \leqq \|a\|_{\mathfrak{A}} \quad \text{p. p.} \tag{2. 5}$$

Posons

$$u_a(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r, t-\tau) v_a(\tau)\, d\tau \qquad (\lambda = re^{it}, 0 \leqq r < 1) \tag{2. 6}$$

où $P(r, t) = \dfrac{1-r^2}{1-2r\cos t + r^2}$ est le noyau de Poisson. En vertu des propriétés bien connues de ce noyau, (2. 5) entraîne

$$\|u_a(\lambda)\|_{\mathfrak{A}'} \leqq \|a\|_{\mathfrak{A}} \qquad (|\lambda| < 1) \tag{2. 7}$$

et

$$\lim_{r \to 1} u_a(re^{it}) = v_a(t) \qquad \text{p. p.}$$

(notamment en tout point t où $v_a(t)$ est égale à la dérivée de son intégrale indéfinie).

Comme $v_a(t)$ est la limite forte dans $L^2(\mathfrak{A}')$ de la série $\sum_0^\infty e^{int}(\Theta_n a)$, (2. 6) entraîne aussi que pour tout λ fixé $(|\lambda| < 1)$

$$u_a(\lambda) = \sum_0^\infty r^n e^{int} \Theta_n a \qquad \text{(convergence forte dans } \mathfrak{A}').$$

Ainsi, la série

$$\Theta(\lambda) = \sum_0^\infty \lambda^n \Theta_n \qquad (|\lambda| < 1)$$

converge au sens de la convergence forte des opérateurs et on a $\Theta(\lambda) a = u_a(\lambda)$. Donc, en vertu de (2. 7), on a $\|\Theta(\lambda) a\| \leqq \|a\|$. Ainsi, $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \Theta(\lambda)\}$ est une fonction analytique *contractive*. La limite radiale $\Theta(e^{it}) = \lim_{r \to 1} \Theta(re^{it})$ existe au sens de la convergence forte des opérateurs, p. p. (*cf.* [VIII], n° 1), et on a

$$\Theta(e^{it}) a = \lim_{r \to 1} \Theta(re^{it}) a = \lim_{r \to 1} u_a(re^{it}) = v_a(t) \qquad \text{p. p.},$$

donc

$$\Phi^{\mathfrak{A}'} Q a = \Theta(e^{it}) a \qquad (a \in \mathfrak{A}). \tag{2. 8}$$

De (2. 2) et (2. 8) il s'ensuit

$$\Phi^{\mathfrak{A}'} Q \sum_k U^k a_k = \sum_k \Phi^{\mathfrak{A}'} U'^k Q a_k = \sum_k e^{ikt} \Phi^{\mathfrak{A}'} Q a_k \quad (cf.\ (2.1))$$
$$= \sum_k e^{ikt} \Theta(e^{it}) a_k = \Theta(e^{it}) \sum_k e^{ikt} a_k = \Theta(e^{it}) \Phi^{\mathfrak{A}} \sum_k U^k a_k,$$

donc

$$\Phi^{\mathfrak{A}'} Q f = \Theta(e^{it}) \Phi^{\mathfrak{A}} f$$

et cela d'abord pour les sommes finies $f = \Sigma U^k a_k$ ($a_k \in \mathfrak{A}$), puis, par continuité, pour tout $f \in M(\mathfrak{A})$. Il n'y a qu'à observer, à cet effet, que $v \to \Theta v$ est une transformation linéaire continue de $L^2(\mathfrak{A})$ dans $L^2(\mathfrak{A}')$, notamment une contraction, conséquence de ce que $\Theta(e^{it})$ est une contraction de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{A}'$ pour presque tous les t.

Passons aux assertions a)—d).

Ad a). C'est une conséquence immédiate des relations

$$Qa = \sum_0^\infty U'^k \Theta_k a, \quad \|Qa\|^2 = \sum_0^\infty \|\Theta_k a\|^2 \qquad (a \in \mathfrak{A}),$$

grâce auxquelles $\|\Theta_0 a\| = \|a\|$ entraîne $Qa = \Theta_0 a$ et $\Theta_n a = 0$ ($n \geqq 1$).

Ad b). Tenant compte de la remarque précédente on déduit que si Θ_0 applique $\mathfrak{A}$ unitairement sur $\mathfrak{A}'$, il en est de même de $Q|\mathfrak{A}$ et on a $\Theta(\lambda) = \Theta_0$. Inversement, si $Q|\mathfrak{A}$ est unitaire, de $\mathfrak{A}$ sur $\mathfrak{A}'$, on a $Qa \in \mathfrak{A}'$, donc $Qa = \Theta_0 a$ ($a \in \mathfrak{A}$) et par conséquent Θ_0 est unitaire aussi.

Ad c). Si $\Theta(e^{it})$ est isométrique p. p., (2. 3) entraîne

$$\|Qh\|_{\mathfrak{R}'} = \|\Phi^{\mathfrak{A}'} Qh\|_{L^2(\mathfrak{A}')} = \|\Theta(e^{it}) h(t)\|_{L^2(\mathfrak{A}')} = \|h(t)\|_{L^2(\mathfrak{A})} = \|h\|_{\mathfrak{R}}$$

pour $h \in M(\mathfrak{A})$, donc Q applique $M(\mathfrak{A})$ isométriquement dans $M(\mathfrak{A}')$. Inversement, si Q jouit de cette propriété, on a nécessairement $\|\Theta(e^{it}) h(t)\|_{L^2(\mathfrak{A}')} = \|h(t)\|_{L^2(\mathfrak{A})}$ pour tout $v \in L^2(\mathfrak{A})$; en posant $h(t) = \varphi(t) a$ où $a \in \mathfrak{A}$ et $\varphi(t)$ est une fonction à valeurs numériques, de carré intégrable, d'ailleurs quelconque, il résulte que $\|\Theta(e^{it}) a\|_{\mathfrak{A}'} = \|a\|_{\mathfrak{A}}$ p. p.; comme $\mathfrak{A}$ est séparable cela entraîne que $\Theta(e^{it})$ est isométrique p. p.

Ad d). C'est une conséquence immédiate de ce que

$$H^2(\mathfrak{A}') = \Phi^{\mathfrak{A}'} M_+(\mathfrak{A}') \quad \text{et} \quad \Theta H^2(\mathfrak{A}) = \Phi^{\mathfrak{A}'} Q M_+(\mathfrak{A}); \quad cf.\ (2.3).$$

Cela achève la démonstration du lemme.

3. Factorisations de la fonction caractéristique qui correspondent à des sous-espaces invariants

1. Revenons au problème traité dans le n° 1 et appliquons le lemme au cas où $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{R}'$ sont égaux à l'espace $\mathfrak{K}$ de la dilatation unitaire minimum U ($=U'$) de T, les sous-espaces ambulants $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ et la contraction Q étant choisies des trois façons différentes suivantes:

(i) $\mathfrak{A} = \mathfrak{L}$, $\mathfrak{A}' = \mathfrak{L}_*$, $Q = P^{\mathfrak{L}_*}$;
(ii) $\mathfrak{A} = \mathfrak{L}$, $\mathfrak{A}' = \mathfrak{F}$, $Q = P^{\mathfrak{F}}$;
(iii) $\mathfrak{A} = \mathfrak{F}$, $\mathfrak{A}' = \mathfrak{L}_*$, $Q = P^{\mathfrak{L}_*}$.

Q permute à U dans tous les trois cas, parce que $M(\mathfrak{L}_*)$ et $M(\mathfrak{F})$ réduisent U. Donc condition (2. 2) est vérifiée. En vertu de (1. 28) et (1. 29), condition (2. 3) est aussi vérifiée.

Soient

$$\text{(3. 1)} \qquad \{\mathfrak{L}, \mathfrak{L}_*, \Theta(\lambda)\}, \quad \{\mathfrak{L}, \mathfrak{F}, \Theta_1(\lambda)\}, \quad \{\mathfrak{F}, \mathfrak{L}_*, \Theta_2(\lambda)\}$$

les fonctions analytiques contractives correspondantes, au sens du lemme.

La première de ces fonctions coïncide avec la fonction caractéristique $\{\mathfrak{D}_T, \mathfrak{D}_{T^*}, \Theta_T(\lambda)\}$ de T, telle qu'elle a été définie dans [VIII]. Notamment, on a

$$\psi\Theta(\lambda)\varphi^{-1} = \Theta_T(\lambda) = [-T + \lambda D_{T^*}(I-\lambda T^*)^{-1}D_T]|\mathfrak{D}_T$$

où φ et ψ sont les applications unitaires de $\mathfrak{L}$ sur $\mathfrak{D}_T$ et de $\mathfrak{L}_*$ sur $\mathfrak{D}_{T^*}$, suivant les cas, envisagées dans [VIII], n° 3. Là, nous avons démontré par un calcul direct que $\Theta_T(\lambda)$ est une fonction contractive *pure*; donc il en est de même de $\Theta(\lambda)$. La même chose s'ensuit aussi de notre lemme, assertion a), puisque les conditions

$$P^{\mathfrak{L}_*}l \in \mathfrak{L}_*, \quad \|P^{\mathfrak{L}_*}l\| = \|l\| \quad \text{pour un} \quad l \in \mathfrak{L}$$

entraînent $l = P^{\mathfrak{L}_*}l \in \mathfrak{L}_*$, donc $l \in \mathfrak{L} \cap \mathfrak{L}_*$, et en vertu de (1. 18) $l = 0$.

Les deux autres des fonctions (3. 1) ne sont pas en général contractives *pures*, mais en tout cas elles *ne sont pas des constantes unitaires*. Grâce à l'assertion b) du lemme, il suffit de montrer à cet effet que $P^{\mathfrak{F}}|\mathfrak{L}$ n'est pas une application unitaire de $\mathfrak{L}$ sur $\mathfrak{F}$ et $P^{\mathfrak{L}_*}|\mathfrak{F}$ n'est pas une application unitaire de $\mathfrak{F}$ sur $\mathfrak{L}_*$. Or, ces sont des conséquences évidentes de (1. 17).

La relation (2. 4) prend les formes, suivant les cas,

$$\text{(3. 2)} \qquad \begin{cases} \Phi^{\mathfrak{L}_*}P^{\mathfrak{L}_*}l = \Theta(e^{it})\Phi^{\mathfrak{L}}l & \text{pour} \quad l \in M(\mathfrak{L}), \\ \Phi^{\mathfrak{F}}P^{\mathfrak{F}}l = \Theta_1(e^{it})\Phi^{\mathfrak{L}}l & \text{pour} \quad l \in M(\mathfrak{L}), \\ \Phi^{\mathfrak{L}_*}P^{\mathfrak{L}_*}f = \Theta_2(e^{it})\Phi^{\mathfrak{F}}f & \text{pour} \quad f \in M(\mathfrak{F}). \end{cases}$$

Appliquons $\Phi^{\mathfrak{L}_*}$ aux deux membres de la relation (1. 25). Grâce à (3. 2) nous obtenons que

$$\Theta(e^{it})l(t) = \Theta_2(e^{it})\Theta_1(e^{it})l(t) \quad \text{pour tout} \quad l \in L^2(\mathfrak{L}), \quad \text{p. p.},$$

en particulier pour toute fonction constante $l(t) = l \in \mathfrak{L}$; vu que $\mathfrak{L}$ est séparable on en déduit $\Theta(e^{it}) = \Theta_2(e^{it})\Theta_1(e^{it})$ p. p. Cela entraîne

$$\text{(3. 3)} \qquad \Theta(\lambda) = \Theta_2(\lambda)\Theta_1(\lambda) \qquad (|\lambda| < 1).\ ^{14})$$

Pour $l \in M(\mathfrak{L})$ on a, grâce à (1. 20a) et (3. 2),

$$\text{(3. 4)} \qquad \|P_{\mathfrak{K}_0}l\|^2 = \|(I - P^{\mathfrak{L}_*})l\|^2 = \|l\|^2 - \|P^{\mathfrak{L}_*}l\|^2 =$$
$$= \|\Phi^{\mathfrak{L}}l\|^2 - \|\Phi^{\mathfrak{L}_*}P^{\mathfrak{L}_*}l\|^2 = \|\Phi^{\mathfrak{L}}l\|^2 - \|\Theta\Phi^{\mathfrak{L}}l\|^2 = \|\Delta\Phi^{\mathfrak{L}}l\|^2,$$

[14]) En effet, $R(\lambda) = \Theta(\lambda) - \Theta_2(\lambda)\Theta_1(\lambda)$ est analytique est borné dans le disque $|\lambda| < 1$ et on a $R(e^{it}) = O$ p.p. Cela entraîne $R(\lambda) = O$ pour tout λ, $|\lambda| < 1$, ce qu'on voit en envisageant les fonctions analytiques bornées, à valeurs scalaires $(R(\lambda)l, l')$ $(l \in \mathfrak{L}, l' \in \mathfrak{L}_*)$.

Δ désignant l'opérateur dans $L^2(\mathfrak{L})$ qui attache à la fonction $v(t)$ la fonction $\Delta(t)v(t)\in L^2(\mathfrak{L})$ où

$$\Delta(t) = [I_{\mathfrak{L}} - \Theta(e^{it})^* \Theta(e^{it})]^{1/2}; \tag{3.5}$$

évidemment, $\Delta(t)$ est un opérateur autoadjoint dans $\mathfrak{L}$, borné par 0 et 1, pour toute valeur de t pour laquelle il a un sens, donc p. p., et Δ est un opérateur autoadjoint dans $L^2(\mathfrak{L})$, borné par 0 et 1. En vertu de (3. 4),

$$\Phi_{\mathfrak{K}_0} P_{\mathfrak{K}_0} l = \Delta \Phi^{\mathfrak{L}} l \qquad (l\in M(\mathfrak{L})) \tag{3.6}$$

définit une application isométrique $\Phi_{\mathfrak{K}_0}$ de $P_{\mathfrak{K}_0}M(\mathfrak{L})$ sur $\Delta L^2(\mathfrak{L})$, qui s'étend par continuité à une application unitaire

$$\Phi_{\mathfrak{K}_0}:\quad \text{de} \quad \overline{P_{\mathfrak{K}_0}M(\mathfrak{L})} = \mathfrak{K}_0 \quad \text{sur} \quad \overline{\Delta L^2(\mathfrak{L})} \qquad (cf.\ (1.20)).$$

En partant des relations (1. 21) et (1. 22) au lieu de (1. 20) on obtient de manière analogue des applications unitaires

$$\Phi_{\mathfrak{K}_1}: \text{ de } \mathfrak{K}_1 \text{ sur } \overline{\Delta_1 L^2(\mathfrak{L})}, \quad \Phi_{\mathfrak{K}_2}: \text{ de } \mathfrak{K}_2 \text{ sur } \overline{\Delta_2 L^2(\mathfrak{F})},$$

telles que

$$\Phi_{\mathfrak{K}_1} P_{\mathfrak{K}_1} l = \Delta_1 \Phi^{\mathfrak{L}} l \ (l\in M(\mathfrak{L})), \quad \Phi_{\mathfrak{K}_2} P_{\mathfrak{K}_2} f = \Delta_2 \Phi^{\mathfrak{F}} f \ (f\in M(\mathfrak{F})). \tag{3.7}$$

Ici, Δ_1 et Δ_2 sont définis à l'analogie de Δ, notamment comme les opérateurs dans $L^2(\mathfrak{L})$ et $L^2(\mathfrak{F})$, suivant les cas, engendrés par les opérateurs

$$\Delta_1(t) = [I_{\mathfrak{L}} - \Theta_1(e^{it})^* \Theta_1(e^{it})]^{1/2}, \quad \Delta_2(t) = [I_{\mathfrak{F}} - \Theta_2(e^{it})^* \Theta_2(e^{it})]^{1/2},$$

dans $\mathfrak{L}$ et dans $\mathfrak{F}$.

Des relations (3. 6), (3. 7) et (2. 1) il s'ensuit aisément que

$$\Phi_{\mathfrak{K}_i} U h = e^{it} \Phi_{\mathfrak{K}_i} h \quad \text{pour} \quad h\in \mathfrak{K}_i \qquad (i=0, 1, 2). \tag{3.8}$$

Comme $\mathfrak{K}_0 = \mathfrak{K}_2 \oplus \mathfrak{K}_1$, $\Phi_{\mathfrak{K}_2} \oplus \Phi_{\mathfrak{K}_1}$ sera une application unitaire de $\mathfrak{K}_0$ sur $\overline{\Delta_2 L^2(\mathfrak{F})} \oplus \overline{\Delta_1 L^2(\mathfrak{L})}$, et par conséquent

$$Z = (\Phi_{\mathfrak{K}_2} \oplus \Phi_{\mathfrak{K}_1}) \Phi_{\mathfrak{K}_0}^{-1} \tag{3.9}$$

sera une application unitaire de $\overline{\Delta L^2(\mathfrak{L})}$ sur $\overline{\Delta_2 L^2(\mathfrak{F})} \oplus \overline{\Delta_1 L^2(\mathfrak{L})}$. Pour un élément de $\overline{\Delta L^2(\mathfrak{L})}$ de la forme Δv où $v=\Phi^{\mathfrak{L}} l$ $(l\in M(\mathfrak{L}))$ nous avons, en vertu de (3. 6), (1. 26), (3. 7) et (3. 2),

$$\begin{aligned} Z\Delta\Phi^{\mathfrak{L}} l &= Z\Phi_{\mathfrak{K}_0} P_{\mathfrak{K}_0} l = (\Phi_{\mathfrak{K}_2} \oplus \Phi_{\mathfrak{K}_1}) P_{\mathfrak{K}_0} l = (\Phi_{\mathfrak{K}_2} \oplus \Phi_{\mathfrak{K}_1})(P_{\mathfrak{K}_2} P^{\mathfrak{F}} l + P_{\mathfrak{K}_1} l) = \\ &= \Phi_{\mathfrak{K}_2} P_{\mathfrak{K}_2} P^{\mathfrak{F}} l \oplus \Phi_{\mathfrak{K}_1} P_{\mathfrak{K}_1} l = \Delta_2 \Phi^{\mathfrak{F}} P^{\mathfrak{F}} l \oplus \Delta_1 \Phi^{\mathfrak{L}} l = \Delta_2 \Theta_1 \Phi^{\mathfrak{L}} l \oplus \Delta_1 \Phi^{\mathfrak{L}} l, \end{aligned}$$

donc

$$Z\Delta v = \Delta_2 \Theta_1 v \oplus \Delta_1 v \quad \text{pour tout} \quad v\in L^2(\mathfrak{L}). \tag{3.10}$$

Vu que les éléments de la forme Δv sont denses dans $\overline{\Delta L^2(\mathfrak{L})}$, leurs transformés par Z doivent être denses dans $\overline{\Delta_2 L^2(\mathfrak{F})} \oplus \overline{\Delta_1 L^2(\mathfrak{L})}$, donc

$$\overline{\{\Delta_2 \Theta_1 v \oplus \Delta_1 v:\ v\in L^2(\mathfrak{L})\}} = \overline{\Delta_2 L^2(\mathfrak{F})} \oplus \overline{\Delta_1 L^2(\mathfrak{L})}. \tag{3.11}$$

Cela étant, envisageons la transformation

$$\Omega = \Phi_+^{\mathfrak{L}_*} \oplus \Phi_{\mathfrak{K}_2} \oplus \Phi_{\mathfrak{K}_1};$$

celle-ci applique l'espace $\mathfrak{K}_+ = M_+(\mathfrak{L}_*) \oplus \mathfrak{K}_2 \oplus \mathfrak{K}_1$ unitairement sur l'espace

$$\mathbf{K}_+ = H^2(\mathfrak{L}_*) \oplus \overline{\Delta_2 L^2(\mathfrak{F})} \oplus \overline{\Delta_1 L^2(\mathfrak{L})}.$$

$\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}_1$ et $\mathfrak{H}_2$ seront appliqués par Ω sur

$$\mathbf{H} = [H^2(\mathfrak{L}_*) \oplus \overline{\Delta_2 L^2(\mathfrak{F})} \oplus \overline{\Delta_1 L^2(\mathfrak{L})}] \ominus \{\Theta_2 \Theta_1 w \oplus \Delta_2 \Theta_1 w \oplus \Delta_1 w \colon w \in H^2(\mathfrak{L})\},$$

$$\mathbf{H}_1 = [\{\Theta_2 w' \oplus \Delta_2 w' \colon w' \in H^2(\mathfrak{F})\} \oplus \overline{\Delta_1 L^2(\mathfrak{L})}] \ominus$$
$$\ominus \{\Theta_2 \Theta_1 w \oplus \Delta_2 \Theta_1 w \oplus \Delta_1 w \colon w \in H^2(\mathfrak{L})\}$$

et

$$\mathbf{H}_2 = [H^2(\mathfrak{L}_*) \oplus \overline{\Delta_2 L^2(\mathfrak{F})} \oplus \{0\}] \ominus \{\Theta_2 w' \oplus \Delta_2 w' \oplus 0 \colon w' \in H^2(\mathfrak{F})\},$$

suivant les cas. Cela résulte de ce que, en vertu de (1. 5) et (1. 24),

$$\mathfrak{H} = [M_+(\mathfrak{L}_*) \oplus \mathfrak{K}_2 \oplus \mathfrak{K}_1] \ominus \{P^{\mathfrak{L}_*} P^{\mathfrak{F}} l \oplus P_{\mathfrak{K}_2} P^{\mathfrak{F}} l \oplus P_{\mathfrak{K}_1} l \colon l \in M_+(\mathfrak{L})\},$$

et en vertu de (1. 13) et la première des relations (1. 23),

$$\mathfrak{H}_2 = [M_+(\mathfrak{L}_*) \oplus \mathfrak{K}_2] \ominus \{P^{\mathfrak{L}_*} f \oplus P_{\mathfrak{K}_2} f \colon f \in M_+(\mathfrak{F})\},$$

et que $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}_2$.

A l'opérateur U_+ il correspond par Ω dans $\mathfrak{K}_+$ l'opérateur de la multiplication par la fonction e^{it}; *cf.* (2. 1) et (3. 8). Grâce à la relation (1. 6), à T il correspond dans $\mathbf{H}$ l'opérateur $\mathbf{T}$ pour lequel

$$\mathbf{T}^*(u \oplus v_2 \oplus v_1) = e^{-it}[u(e^{it}) - u(0)] \oplus e^{-it} v_2(t) \oplus e^{-it} v_1(t) \quad (u \oplus v_2 \oplus v_1 \in \mathbf{H}).$$

Il est manifeste que le résultat obtenu peut être reformulé en remplaçant $\{\mathfrak{L}, \mathfrak{L}_*, \Theta(\lambda)\}$ par une fonction quelconque qui coïncide avec celle-ci. Ainsi nous venons de démontrer la partie a) du théorème suivant:

Théorème 1. *Soit T une contraction complètement non-unitaire de l'espace $\mathfrak{H}$ et soit $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{E}_*, \Theta(\lambda)\}$ une fonction analytique contractive qui coïncide avec la fonction caractéristique de T.*

a) *A tout sous-espace non banal $\mathfrak{H}_1$ de $\mathfrak{H}$, invariant pour T, il correspond une factorisation $\Theta(\lambda) = \Theta_2(\lambda)\Theta_1(\lambda)$ de $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{E}_*, \Theta(\lambda)\}$ en produit de deux fonctions analytiques contractives $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{F}, \Theta_1(\lambda)\}$ et $\{\mathfrak{F}, \mathfrak{E}_*, \Theta_2(\lambda)\}$, telle que*

(i) *aucun des facteurs n'est une fonction constante unitaire,*

(ii) *la variété linéaire $\mathbf{V} = \{\Delta_2 \Theta_1 v \oplus \Delta_1 v \colon v \in L^2(\mathfrak{E})\}$ est dense dans*

$$\overline{\Delta_2 L^2(\mathfrak{F})} \oplus \overline{\Delta_1 L^2(\mathfrak{E})},$$

(iii) *T est unitairement équivalente à l'opérateur $\mathbf{T}$, défini dans l'espace fonctionnel*

$$\mathbf{H} = [H^2(\mathfrak{E}_*) \oplus \overline{\Delta_2 L^2(\mathfrak{F})} \oplus \overline{\Delta_1 L^2(\mathfrak{E})}] \ominus \{\Theta_2 \Theta_1 w \oplus \Delta_2 \Theta_1 w \oplus \Delta_1 w \colon w \in H^2(\mathfrak{E})\} \tag{3.12}$$

par

$$\mathbf{T}^*(u \oplus v_2 \oplus v_1) = e^{-it}[u(e^{it}) - u(0)] \oplus e^{-it} v_2(t) \oplus e^{-it} v_1(t), \tag{3.13}$$

les sous-espaces de **H** *qui correspondent à* $\mathfrak{H}_1$ *et* $\mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}_1$ *étant*

(3. 14) $$\mathbf{H}_1 = [\{\Theta_2 w' \oplus \Delta_2 w' : w' \in H^2(\mathfrak{F})\} \oplus \overline{\Delta_1 L^2(\mathfrak{E})}] \ominus \ominus \{\Theta_2 \Theta_1 w \oplus \Delta_2 \Theta_1 w \oplus \Delta_1 w : w \in H^2(\mathfrak{E})\}$$

et

(3. 15) $$\mathbf{H}_2 = [H^2(\mathfrak{E}_*) \oplus \overline{\Delta_2 L^2(\mathfrak{E})} \oplus \{0\}] \ominus \{\Theta_2 w' \oplus \Delta_2 w' \oplus 0 : w' \in H^2(\mathfrak{E})\}.$$

b) *Toute factorisation de* $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{E}_*, \Theta(\lambda)\}$ *en produit de deux fonctions analytiques contractives satisfaisant aux conditions* (i) *et* (ii) *dérive, à coïncidence près, d'un sous-espace invariant non banal pour* T, *de la manière indiquée.*

Pour démontrer la partie b) du théorème, il suffit de considérer la contraction **T**, unitairement équivalente à celle donnée, qui est définie dans l'espace

(3. 16) $$\mathbf{H} = [H^2(\mathfrak{E}_*) \oplus \overline{\Delta L^2(\mathfrak{E})}] \ominus \{\Theta w \oplus \Delta w : w \in H^2(\mathfrak{E})\}$$

par

(3. 17) $$\mathbf{T}^*(u \oplus v) = e^{-it}[u(e^{it}) - u(0)] \oplus e^{-it} v(t);$$

cf. [VIII], n° 3. La relation évidente

$$I_{\mathfrak{E}} - \Theta(e^{it})^* \Theta(e^{it}) = \Theta_1(e^{it})^* [I_{\mathfrak{F}} - \Theta_2(e^{it})^* \Theta_2(e^{it})] \Theta_1(e^{it}) + [I_{\mathfrak{E}} - \Theta_1(e^{it})^* \Theta_1(e^{it})]$$

entraîne que

$$Z(t) \colon \; \Delta(t) g \to \Delta_2(t) \Theta_1(e^{it}) g \oplus \Delta_1(t) g \qquad (g \in \mathfrak{E})$$

est une application isométrique de $\Delta(t)\mathfrak{E}$ dans $\Delta_2(t)\mathfrak{F} \oplus \Delta_1(t)\mathfrak{E}$ p. p., notamment en tous les points t où les limites radiales de Θ, Θ_1 et Θ_2 existent. Cela entraîne, à son tour, que

$$Z \colon \; \Delta v \to \Delta_2 \Theta_1 v \oplus \Delta_1 v \qquad (v \in L^2(\mathfrak{E}))$$

est une application isométrique de $\Delta L^2(\mathfrak{E})$ dans $\Delta_2 L^2(\mathfrak{F}) \oplus \Delta_1 L^2(\mathfrak{E})$. En vertu de la condition (ii) Z se prolonge par continuité à une application *unitaire* de $\overline{\Delta L^2(\mathfrak{E})}$ sur $\overline{\Delta_2 L^2(\mathfrak{F})} \oplus \overline{\Delta_1 L^2(\mathfrak{E})}$. En identifiant les éléments qui se correspondent par Z, on obtient pour **H** la représentation alternative (3. 12), d'où il résulte la décomposition $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 \oplus \mathbf{H}_2$ donnée par (3. 14) et (3. 15). Dans cette représentation de **H**, **T** sera définie par

$$\mathbf{T}^*(u \oplus v_2 \oplus v_1) = e^{-it}[u(e^{it}) - u(0)] \oplus e^{-it} v_2(t) \oplus e^{-it} v_1(t) \quad (u \oplus v_2 \oplus v_1 \in \mathbf{H});$$

$\mathbf{H}_2$ est évidemment invariant pour $\mathbf{T}^*$, donc $\mathbf{H}_1$ invariant pour **T**.

De plus, ce sous-espace invariant est *non banal.*

En effet, $\mathbf{H}_2 = \{0\}$ veut dire

$$H^2(\mathfrak{E}_*) \oplus \overline{\Delta_2 L^2(\mathfrak{F})} = \{\Theta_2 w \oplus \Delta_2 w : \; w \in H^2(\mathfrak{E})\},$$

c'est-à-dire qu'à tout couple $u \in H^2(\mathfrak{E}_*)$, $v \in \overline{\Delta_2 L^2(\mathfrak{F})}$ il correspond un $w \in H^2(\mathfrak{E})$ tel que $u = \Theta_2 w$, $v = \Delta_2 w$ et par conséquent

$$\Theta_2^* u + \Delta_2 v = \Theta_2^* \Theta_2 w + \Delta_2^2 w = w \in H^2(\mathfrak{E}).$$

Choisissons en particulier $u=0$, $v=\Delta_2(t)e^{-int}f$ $(f\in\mathfrak{F})$; il résulte que $\Delta_2(t)^2e^{-int}f\in H^2(\mathfrak{E})$ et cela pour tout entier n, d'où: $\Delta_2(t)^2f=0$ p. p. Puisque $\mathfrak{F}$ est séparable, cela entraîne $\Delta_2(t)=O$ p. p., donc $\Theta_2(e^{it})$ est isométrique p. p. Choisissons alors pour u une fonction constante $u(\lambda)=e_*$ $(e_*\in\mathfrak{E}_*)$; il lui correspond un $w\in H^2(\mathfrak{E})$ tel que $e_*=\Theta_2 w$, c'est-à-dire que $e_*=\Theta_2(e^{it})w(e^{it})$ p. p. Faisant parcourir e_* un ensemble dénombrable $\{e_{*\nu}\}$, partout dense dans $\mathfrak{E}_*$, et en réunissant les ensembles des points t exceptionnels correspondants, il résulte que sauf les points d'un ensemble de mesure nulle, on a pour tout t: $e_{*\nu}\in\Theta_2(e^{it})\mathfrak{E}$ $(\nu=1, 2, \dots)$ et par conséquent $\mathfrak{E}_*\subseteqq\overline{\Theta_2(e^{it})\mathfrak{E}}$. Ainsi, $\Theta_2(e^{it})$ est p. p. unitaire (de $\mathfrak{E}$ sur $\mathfrak{E}_*$). De la même relation $e_*=\Theta_2(e^{it})w(e^{it})$ il s'ensuit $\Theta_2(e^{it})^*e_*=w(e^{it})$, donc, si $\Theta_2(\lambda)$ a le développement en série entière $\sum_0^\infty\lambda^n\Theta_{2,n}$, on a

$$\sum_0^\infty e^{-int}\Theta_{2,n}^*e_*\in H^2(\mathfrak{E}),$$

d'où il résulte: $\Theta_{2,n}^*=O$, $\Theta_{2,n}=O$ $(n=1, 2, \dots)$, donc $\Theta_2(\lambda)=\Theta_{2,0}$. Ainsi, $\mathbf{H}_2=\{0\}$ entraîne que $\Theta_2(\lambda)$ est une constante unitaire, ce qui contredit l'hypothèse faite.

Un raisonnement analogue montre que $\mathbf{H}_1=\{0\}$ entraîne que $\Theta_1(\lambda)$ est une constante unitaire, ce qui contredit aussi l'hypothèse faite.

Cela achève la démonstration du théorème.

4. Quelques propositions additionnelles

1. Commençons par la suivante

Proposition 4. 1. *Pour toute fonction analytique contractive $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \Omega(\lambda)\}$ il existe une fonction analytique contractive pure $\{\mathfrak{A}^0, \mathfrak{B}^0, \Omega^0(\lambda)\}$, et une seule, telle que $\mathfrak{A}^0\subseteqq\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}^0\subseteqq\mathfrak{B}$, $\Omega^0(\lambda)=\Omega(\lambda)|\mathfrak{A}^0$ et que $\Omega'(\lambda)=\Omega(\lambda)|\mathfrak{A}'$ est une transformation unitaire de $\mathfrak{A}'=\mathfrak{A}\ominus\mathfrak{A}^0$ sur $\mathfrak{B}'=\mathfrak{B}\ominus\mathfrak{B}^0$. On appellera $\{\mathfrak{A}^0, \mathfrak{B}^0, \Omega^0(\lambda)\}$ la „partie pure" de $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \Omega(\lambda)\}$.*

Démonstration. Posons

$$\mathfrak{A}'=\{a: a\in\mathfrak{A}, a=\Omega(0)^*\,\Omega(0)a\},\quad \mathfrak{B}'=\{b: b\in\mathfrak{B}, b=\Omega(0)\,\Omega(0)^*b\}.$$

Pour $a\in\mathfrak{A}'$ on a $\Omega(0)a=\Omega(0)\Omega(0)^*\,\Omega(0)a$, donc $\Omega(0)a\in\mathfrak{B}'$, ce qui veut dire que $\Omega(0)\mathfrak{A}'\subseteqq\mathfrak{B}'$. On obtient de manière analogue que $\Omega(0)^*\mathfrak{B}'\subseteqq\mathfrak{A}'$; en vertu de la relation $b=\Omega(0)\,\Omega(0)^*b$ $(b\in\mathfrak{B}')$ cela entraîne que $\mathfrak{B}'\subseteqq\Omega(0)\mathfrak{A}'$. Donc $\Omega(0)$ applique $\mathfrak{A}'$ *sur* $\mathfrak{B}'$. Cette application est *unitaire* parce que pour $a\in\mathfrak{A}'$ on a

$$\|\Omega(0)a\|^2=(\Omega(0)^*\,\Omega(0)a, a)=(a, a)=\|a\|^2.$$

Puisque $\Omega(\lambda)$ est analytique, on a pour $0\leqq r<1$ et $a\in\mathfrak{A}$

$$\Omega(0)a=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Omega(re^{it})a\,dt, \tag{4. 1}$$

d'où, pour $a \in \mathfrak{A}'$,

$$\|a\| = \|\Omega(0)a\| = \left\| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Omega(re^{it})a\,dt \right\| \leqq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|\Omega(re^{it})a\| dt \leqq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|a\|\,dt = \|a\|$$

et par conséquent

$$\left\| \int_0^{2\pi} \Omega(re^{it})a\,dt \right\| = \int_0^{2\pi} \|\Omega(re^{it})a\|\,dt, \tag{4.2}$$

et

$$\|\Omega(re^{it})a\| = \|a\| \qquad (0 \leqq t < 2\pi). \tag{4.3}$$

Désignons l'intégrale dans le second membre de (4. 1) par a_r. (4. 2) entraîne que $\Omega(re^{it})a = \lambda_r(t)a_r$ avec $\lambda_r(t) \geqq 0$,[15]); d'après (4. 3), $\lambda_r(t)$ a une valeur constante. Donc $\Omega(re^{it})a$ a aussi une valeur constante; d'après (4. 1) cette valeur doit être égale à $\Omega(0)a$. Ainsi, pour tout $a \in \mathfrak{A}'$ et $|\lambda| < 1$, on a

$$\Omega(\lambda)a = \Omega(0)a.$$

En d'autres mots, $\Omega'(\lambda) = \Omega(\lambda)|\mathfrak{A}'$ est une application constante unitaire de $\mathfrak{A}'$ sur $\mathfrak{B}'$. De manière analogue, $\Omega(\lambda)^*|\mathfrak{B}'$ est une application constante unitaire de $\mathfrak{B}'$ sur $\mathfrak{A}'$. Par conséquent, on a pour $a \in \mathfrak{A}^0 = \mathfrak{A} \ominus \mathfrak{A}'$ et $b \in \mathfrak{B}'$:

$$(\Omega(\lambda)a, b) = (a, \Omega(\lambda)^* b) = 0,$$

donc $\Omega(\lambda)a \in \mathfrak{B}^0 = \mathfrak{B} \ominus \mathfrak{B}'$, c'est-à-dire que $\Omega^0(\lambda) = \Omega(\lambda)|\mathfrak{A}^0$ applique $\mathfrak{A}^0$ dans $\mathfrak{B}^0$. Montrons que la fonction analytique contractive ainsi obtenue $\{\mathfrak{A}^0, \mathfrak{B}^0, \Omega^0(\lambda)\}$ est *pure*, c'est-à-dire que $\|\Omega^0(0)a\| < \|a\|$ pour tout $a \in \mathfrak{A}^0$, $a \neq 0$. En effet, si l'on a $\|\Omega^0(0)a\| = \|a\|$ pour un $a \in \mathfrak{A}^0$, il en résulte que

$$((I - \Omega(0)^*\Omega(0))a, a) = \|a\|^2 - \|\Omega(0)a\|^2 = \|a\|^2 - \|\Omega^0(0)a\|^2 = 0,$$

d'où $(I - \Omega(0)^*\Omega(0))a = 0$, $a = \Omega(0)^*\Omega(0)a$, donc $a \in \mathfrak{A}'$. Comme $\mathfrak{A}^0 \perp \mathfrak{A}'$, cela entraîne $a = 0$.

Les décompositions $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^0 \oplus \mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}^0 \oplus \mathfrak{B}'$ que nous venons de cons-

---

[15]) Pour une fonction $f(t)$ $(a \leqq t \leqq b)$, à valeurs dans un espace de Hilbert, faiblement continue, on a, en posant $g = \int_a^b f(t)\,dt$,

$$\left\| \int_a^b f(t)\,dt \right\|^2 = \left(\int_a^b f(t)\,dt, g \right) = \int_a^b (f(t), g)\,dt \leqq \int_a^b \|f(t)\| \cdot \|g\|\,dt = \int_a^b \|f(t)\|\,dt \cdot \|g\|,$$

d'où

$$\left\| \int_a^b f(t)dt \right\| \leqq \int_a^b \|f(t)\|\,dt.$$

Pour qu'on ait égalité, il faut et il suffit que $(f(t), g)$ soit égal à $\|f(t)\| \cdot \|g\|$ pour tout t, ce qui veut dire que $f(t) = \lambda(t)g$ avec un facteur numérique $\lambda(t) \geqq 0$.

truire, vérifient donc les conditions de la proposition. Il nous reste à montrer leur unicité. Envisageons à cet effet des décompositions quelconques $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1^0 \oplus \mathfrak{A}_1'$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1^0 \oplus \mathfrak{B}_1'$ vérifiant ces conditions. Puisque $\Omega(0)$ applique $\mathfrak{A}_1'$ unitairement sur $\mathfrak{B}_1'$, on a $\|a\| = \|\Omega(0)a\|$ pour $a \in \mathfrak{A}_1'$, ce qui entraîne $(I - \Omega(0)^* \Omega(0))a = 0$, donc $a \in \mathfrak{A}'$; par conséquent $\mathfrak{A}_1' \subseteq \mathfrak{A}'$. S'il existait dans $\mathfrak{A}'$ un élément $a \neq 0$ orthogonal à $\mathfrak{A}_1'$, on aurait $\|\Omega(0)a\| = \|a\|$ parce que $a \in \mathfrak{A}'$, et $\|\Omega(0)a\| < \|a\|$ parce que $a \in \mathfrak{A}_1^0$: contradiction. Donc $\mathfrak{A}_1' = \mathfrak{A}'$ et par conséquent $\mathfrak{B}_1' = \Omega(\lambda)\mathfrak{A}_1' = \Omega(\lambda)\mathfrak{A}' = \mathfrak{B}'$, $\mathfrak{A}_1^0 = \mathfrak{A} \ominus \mathfrak{A}_1' = \mathfrak{A} \ominus \mathfrak{A}' = \mathfrak{A}^0$, $\mathfrak{B}_1^0 = \mathfrak{B} \ominus \mathfrak{B}_1' = \mathfrak{B} \ominus \mathfrak{B}' = \mathfrak{B}^0$. Cela achève la démonstration.

Le résultat que nous venons d'obtenir nous permet de compléter le théorème 2 de [VIII] de la façon suivante:

Proposition 4. 2. *Soit $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{E}_*, \Theta(\lambda)\}$ une fonction analytique contractive qui n'est pas une constante unitaire, et soit $\mathbf{T}$ la contraction complètement non-unitaire qu'elle engendre, c'est-à-dire que $\mathbf{T}$ est définie dans l'espace*

$$\mathbf{H} = \left(H^2(\mathfrak{E}_*) \oplus \overline{\Delta L^2(\mathfrak{E})}\right) \ominus [\Theta w \oplus \Delta w \colon w \in H^2(\mathfrak{E})]$$

par

$$\mathbf{T}^*(u_* \oplus v) = e^{-it}[u_*(e^{it}) - u_*(0)] \oplus e^{-it} v(t) \qquad (u_* \oplus v \in \mathbf{H}).$$

La fonction caractéristique de $\mathbf{T}$ coïncide alors avec la partie pure $\{\mathfrak{E}^0, \mathfrak{E}_*^0, \Theta^0(\lambda)\}$ de $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{E}_*, \Theta(\lambda)\}$.

Démonstration. Ici, bien entendu, on a posé $\Delta(t) = [I_{\mathfrak{E}} - \Theta(e^{it})^* \Theta(e^{it})]^{\frac{1}{2}}$. Désignons par $\Delta^0(t)$ la fonction analogue formée avec $\Theta^0(\lambda)$. La décomposition $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}' \oplus \mathfrak{E}^0$ entraîne de manière évidente la décomposition $L^2(\mathfrak{E}) = L^2(\mathfrak{E})' \oplus \oplus L^2(\mathfrak{E}^0)$ et avec cela la décomposition $H^2(\mathfrak{E}) = H^2(\mathfrak{E}') \oplus H^2(\mathfrak{E}^0)$. Puisque $\Theta'(\lambda)$ est une constante unitaire, on a $\Delta(t)v(t) = 0 \oplus \Delta^0(t)v^0(t)$ pour toute fonction $v = v' \oplus v^0 \in L^2(\mathfrak{E})$. Par conséquent,

$$\{\Theta w \oplus \Delta w \colon w \in H^2(\mathfrak{E})\} = \{\Theta' w' \oplus \Theta^0 w^0 \oplus \Delta^0 w^0 \colon w' \in H^2(\mathfrak{E}'),\ w^0 \in H^2(\mathfrak{E}^0)\},$$

donc, vu que $\Theta' H^2(\mathfrak{E}') = H^2(\Theta'\mathfrak{E}') = H^2(\mathfrak{E}_*')$,

$$\{\Theta w \oplus \Delta w \colon w \in H^2(\mathfrak{E})\} = H^2(\mathfrak{E}_*') \oplus \{\Theta^0 w^0 \oplus \Delta^0 w^0 \colon w^0 \in H^2(\mathfrak{E})\}.$$

Il s'ensuit que si $u_* \oplus v \in \mathbf{H}$, on a $u_* \perp H^2(\mathfrak{E}_*')$, donc $u_* \in H^2(\mathfrak{E}_*^0)$. Par conséquent, l'espace $\mathbf{H}$ s'identifie de façon naturelle à l'espace

$$\mathbf{H}^0 = \left[H^2(\mathfrak{E}_*^0) \oplus \overline{\Delta^0 L^2(\mathfrak{E}^0)}\right] \ominus \{\Theta^0 w^0 \oplus \Delta^0 w^0 \colon w^0 \in H^2(\mathfrak{E}^0)\}$$

et $\mathbf{T}$ à l'opérateur $\mathbf{T}^0$, défini dans $\mathbf{H}^0$ par

$$\mathbf{T}^{0*}(u_*^0 \oplus v^0) = e^{-it}[u_*^0(e^{it}) - u_*^0(0)] \oplus e^{-it} v^0(t) \qquad (u_*^0 \oplus v^0 \in \mathbf{H}^0).$$

Or, puisque la fonction $\{\mathfrak{E}^0, \mathfrak{E}_*^0, \Theta^0(\lambda)\}$ est *pure*, théorème 2 de [VIII] affirme que la fonction caractéristique de $\mathbf{T}^0$, ou, ce qui revient au même, celle de $\mathbf{T}$, coïncide avec $\{\mathfrak{E}^0, \mathfrak{E}_*^0, \Theta^0(\lambda)\}$. Proposition 4. 2 est démontrée.

2. Revenons au théorème 1. Soit $T = \begin{pmatrix} T_1 & X \\ O & T_2 \end{pmatrix}$ la forme triangulaire de T suivant la décomposition $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$ et soit $\Theta = \Theta_2 \Theta_1$ la factorisation de la fonction caractéristique de T, correspondant au sous-espace invariant $\mathfrak{H}_1$. Nous sommes à même d'ajouter au théorème 1 la suivante

Proposition 4. 3. *Les fonctions caractéristiques de T_1 et T_2 coïncident, selon les cas, avec les parties pures de Θ_1 et Θ_2.*

Démonstration. Il suffit d'envisager le modèle fonctionnel de T, donc $\mathbf{T}=\begin{pmatrix}\mathbf{T}_1 & \mathbf{X}\\ \mathbf{O} & \mathbf{T}_2\end{pmatrix}$. Puisque $\mathbf{T}^*=\begin{pmatrix}\mathbf{T}_1^* & \mathbf{O}\\ \mathbf{X}^* & \mathbf{T}_2^*\end{pmatrix}$, on a

$$\mathbf{T}_2^* = \mathbf{T}^*|\mathbf{H}_2 \quad \text{et} \quad \mathbf{T}_1^* = \mathbf{P}_1\mathbf{T}^*|\mathbf{H}_1,$$

$\mathbf{P}_1$ désignant la projection orthogonale dans $\mathbf{H}$ sur $\mathbf{H}_1$.

Pour $\mathbf{T}_2$ l'assertion découle de manière évidente de la définition (3. 15) de $\mathbf{H}_2$ et de la proposition 4. 2.

Quant à $\mathbf{T}_1$, observons d'abord que, grâce à la définition (3. 14), les éléments de $\mathbf{H}$ appartenant à $\mathbf{H}_1$ sont ceux de la forme

$$\Theta_2 w \oplus \Delta_2 w \oplus v \quad \text{où} \quad w \in H^2(\mathfrak{F}), \quad v \in \overline{\Delta_1 L^2(\mathfrak{E})}$$

et

$$\Theta_1^*\Theta_2^*(\Theta_2 w)+\Theta_1^*\Delta_2(\Delta_2 w)+\Delta_1 v \perp H^2(\mathfrak{E}):$$

la dernière condition se réduit évidemment à ce que

$$\Theta_1^* w+\Delta_1 v \perp H^2(\mathfrak{E}). \tag{4. 4}$$

Pour $\Theta_2 w\oplus\Delta_2 w\oplus v\in\mathbf{H}_1$ nous avons, en vertu de (3. 13),

$$\begin{aligned}\mathbf{T}^*(\Theta_2 w\oplus\Delta_2 w\oplus v) &= e^{-it}[\Theta_2 w-\Theta_2(0)w(0)]\oplus e^{-it}\Delta_2 w\oplus e^{-it}v =\\ &= (\Theta_2 w_1\oplus\Delta_2 w_1\oplus v_1)+(w_2\oplus v_2\oplus 0)\end{aligned}$$

où

$$w_1(\lambda)=\frac{w(\lambda)-w(0)}{\lambda}, \qquad v_1(t)=e^{-it}v(t),$$

$$w_2(\lambda)=\frac{\Theta_2(\lambda)-\Theta_2(0)}{\lambda}\,w(0), \qquad v_2(t)=e^{-it}\Delta_2(t)\,w(0).$$

Grâce à (4. 4) on a

$$\Theta_1^* w_1+\Delta_1 v_1 = e^{-it}(\Theta_1^* w+\Delta_1 v)-e^{-it}\Theta_1^* w(0)\perp H^2(\mathfrak{E}),$$

donc on voit que $\Theta_2 w_1\oplus\Delta_2 w_1\oplus v_1\in\mathbf{H}_1$. D'autre part, on a $w_2\oplus v_2\oplus 0\in\mathbf{H}_2$ parce que, évidemment,

$$\Theta_2^* w_2+\Delta_2 v_2 = e^{-it}w(0)-e^{-it}\Theta_2(e^{it})^*\,\Theta_2(0)w(0)\perp H^2(\mathfrak{E}).$$

Ainsi,

$$\mathbf{T}_1^*(\Theta_2 w\oplus\Delta_2 w\oplus v)=\mathbf{P}_1\mathbf{T}^*(\Theta_2 w\oplus\Delta_2 w\oplus v)=\Theta_2 w_1\oplus\Delta_2 w_1\oplus v_1.$$

En se servant de la transformation

$$\Theta_2 w_2\oplus\Delta_2 w\to w \qquad (w\in H^2(\mathfrak{F}))$$

qui applique $\{\Theta_2 w \oplus \Delta_2 w\colon w \in H^2(\mathfrak{F})\}$ unitairement sur $H^2(\mathfrak{F})$, on peut donc identifier l'espace $\mathbf{H}_1$ à l'espace

$$\tilde{\mathbf{H}}_1 = [H^2(\mathfrak{F}) \oplus \overline{\Delta_1 L^2(\mathfrak{E})}] \ominus \{\Theta_1 w \oplus \Delta_1 w\colon \quad w \in H^2(\mathfrak{E})\}$$

et $\mathbf{T}_1$ à l'opérateur $\tilde{\mathbf{T}}_1$ de $\tilde{\mathbf{H}}_1$, défini par

$$\tilde{\mathbf{T}}_1^*(w \oplus v) = w_1 \oplus v_1.$$

On peut alors appliquer la proposition 4. 2 et on obtient que la fonction caractéristique de $\mathbf{T}_1$ coïncide avec la partie pure de Θ_1.

Cela achève la démonstration de la proposition 4. 3.

3. Il convient d'ajouter quelques remarques concernant la condition (ii) du théorème. [16])

Proposition 4.4. *La condition* (ii) *est équivalente à la condition suivante:*

(ii)' *la variété linéaire* $\mathbf{V}(t) = \{\Delta_2(t)\Theta_1(e^{it})e \oplus \Delta_1(t)e\colon e \in \mathfrak{E}\}$ *est dense dans* $\overline{\Delta_2(t)\mathfrak{F}} \oplus \overline{\Delta_1(t)\mathfrak{E}}$ *pour presque tous les* t.

Démonstration. Supposons que (ii) est vérifiée et envisageons en particulier deux fonctions constantes $e(t) \equiv e, f(t) \equiv f$ $(e \in \mathfrak{E}, f \in \mathfrak{F})$. Il s'ensuit qu'il existe une suite $\{v_n\}$ d'éléments de $L^2(\mathfrak{E})$ telle que $\Delta_2 \Theta_1 v_n \oplus \Delta_1 v_n$ tend vers $\Delta_2 f \oplus \Delta_1 e$ dans dans la métrique de l'espace $L^2(\mathfrak{F}) \oplus L^2(\mathfrak{E})$, c'est-à-dire en moyenne, d'où il s'ensuit que si l'on remplace la suite $\{v_n\}$ au besoin par une suite partielle convenable [17]), $\Delta_2(t)\Theta_1(e^{it})v_n(t) \oplus \Delta_1(t)v_n(t)$ tend vers $\Delta_2(t)f \oplus \Delta_1(t)e$ même p. p. (dans la métrique de $\mathfrak{F} \oplus \mathfrak{E}$). Cela prouve que $\Delta_2(t)f \oplus \Delta_1(t)e \in \overline{\mathbf{V}(t)}$ p. p. En faisant parcourir e et f deux ensembles dénombrables $\{e_n\}$ et $\{f_m\}$, denses dans $\mathfrak{E}$ et $\mathfrak{F}$, il résulte que $\Delta_2(t)f_m \oplus \Delta_1(t)e_n \in \overline{\mathbf{V}(t)}$ pour tous les t à l'exception des points d'un ensemble de mesure nulle, indépendant de n et m. Pour tout t non exceptionnel on aura alors $\Delta_2(t)\mathfrak{F} \oplus \Delta_1(t)\mathfrak{E} \subseteqq \overline{\mathbf{V}(t)}$, donc (ii) entraîne (ii)'.

Supposons, inversement, que (ii)' est vérifiée, et envisageons un élément $v_2 \oplus v_1$ de $\overline{\Delta L^2(\mathfrak{F})} \oplus \overline{\Delta_1 L^2(\mathfrak{E})}$, orthogonal à $\mathbf{V}$, c'est-à-dire tel que $(v_2, \Delta_2 \Theta_1 u) + (v_1, \Delta_1 u) = 0$ pour tout $u \in L^2(\mathfrak{E})$. On a alors $\Theta_1(e^{it})^* \Delta_2(t)v_2(t) + \Delta_1(t)v_1(t) = 0$ p. p., et par conséquent, pour tout t non exceptionnel, $v_2(t) \oplus v_1(t) \perp \mathbf{V}(t)$. Or, comme $v_2 \oplus v_1 \in \overline{\Delta_2 L^2(\mathfrak{F})} \oplus \overline{\Delta_1 L^2(\mathfrak{E})}$, on a $v_2(t) \oplus v_1(t) \in \overline{\Delta_2(t)\mathfrak{F}} \oplus \overline{\Delta_1(t)\mathfrak{E}}$ p. p., donc, en vertu de

---

[16]) En vertu du théorème 1, les factorisations de la fonction caractéristique de T qui ne vérifient pas la condition (ii), ne correspondent pas à des sous-espaces invariants pour T. Mais elles correspondent à des sous-espaces invariants de certaines contractions dont la partie complètement non-unitaire est égale à T. Notamment, en partant du modèle fonctionnel (3. 16)—(3. 17) pour T, on doit *ajouter* à cet espace $\mathbf{H}$ l'espace orthogonal

$$\mathbf{W} = [\overline{\Delta_2 L^2(\mathfrak{F})} \oplus \overline{\Delta_1 L^2(\mathfrak{E})}] \ominus \overline{\mathbf{V}}$$

et de prolonger $\mathbf{T}$ en la définissant dans $\mathbf{W}$ comme multiplication par e^{it}, pour arriver à l'espace et l'opérateur définis par (3. 12) et (3. 13) et aux sous-espaces de cet espace définis par (3. 14) et (3. 15). — Pour des indications additionnelles dans cet ordre d'idées, *cf.* [1].

[17]) Notamment telle que $\sum_n \|(\Delta_2 \Theta_1 v_n \oplus \Delta_1 v_n) - (\Delta_2 f \oplus \Delta_1 e)\| < \infty$.

(ii)', on doit avoir $v_2(t)\oplus v_1(t)=0$ p. p. Par conséquent, $v_2\oplus v_1=0$. Ainsi, le seul élément orthogonal à $\mathbf{V}$ est le 0, donc (ii)' entraîne (ii).

Remarque. *La condition* (ii)' *est vérifiée en particulier dans le cas où la fonction* $\{\mathfrak{F}, \mathfrak{E}_*, \Theta_2(\lambda)\}$ *est intérieure.*

En effet, on a alors $\Delta_2(t)=O$ presque partout.

Proposition 4.5. *Dans le cas où $\Theta(\lambda)$ est une fonction intérieure, la condition* (ii) *veut dire que $\Theta_1(\lambda)$ et $\Theta_2(\lambda)$ sont aussi intérieures. Si $\Theta(e^{it})$ est même unitaire p. p.,* (ii) *veut dire que $\Theta_1(e^{it})$ et $\Theta_2(e^{it})$ sont aussi p. p. unitaires.*

Démonstration. Comme $\Theta_1(\lambda)$ et $\Theta_2(\lambda)$ sont des fonctions analytiques contractives, l'hypothèse que le produit $\Theta_2(e^{it})\Theta_1(e^{it})=\Theta(e^{it})$ est isométrique p. p. entraîne que $\Theta_1(e^{it})$ est isométrique p. p., donc $\Delta_1(t)=O$ p. p. Ainsi, (ii)' se réduit à la condition

$$(4.5)\qquad \overline{\Delta_2(t)\Theta_1(e^{it})\mathfrak{E}}=\overline{\Delta_2(t)\mathfrak{F}} \quad \text{p. p.}$$

Comme de plus

$$\Theta_1(e^{it})^*\Delta_2(t)^2\Theta_1(e^{it})=\Theta_1(e^{it})^*\Theta_1(e^{it})-\Theta(e^{it})^*\Theta(e^{it})=I-I=O,$$

on a $\Delta_2(t)\Theta_1(e^{it})=O$, p. p., donc en vertu (4.5), $\overline{\Delta_2(t)\mathfrak{F}}=\{0\}$, ce qui veut dire que $\Delta_2(t)=O$ p. p., c'est-à-dire que $\Theta_2(e^{it})$ est aussi isométrique p. p. Lorsque $\Theta(e^{it})$ est même unitaire p. p., on a $I=\Theta(e^{it})\Theta(e^{it})^*=\Theta_2(e^{it})\Theta_1(e^{it})\Theta_1(e^{it})^*\Theta_2(e^{it})^*$ et par conséquent $\overline{\Theta_2(e^{it})\mathfrak{F}}=\mathfrak{E}_*$, donc $\Theta_2(e^{it})$ est non seulement isométrique, mais aussi unitaire, p. p., et il en est alors de même pour $\Theta_1(e^{it})=\Theta_2(e^{it})^{-1}\Theta(e^{it})$. Cela achève la démonstration.

La fonction caractéristique de T est intérieure si $T^{*n}\to O$ $(n\to\infty)$, et dans ce cas seulement (*cf.* [VIII], n° 4). Comme le cas d'une transformation linéaire bornée quelconque peut être réduit à celui-ci par multiplication par un facteur numérique positif convenable, le problème de trouver les sous-espaces non banaux, invariants pour une transformation linéaire bornée quelconque, se ramène à trouver les factorisations des fonctions analytiques contractives pures intérieures en produit de deux fonctions intérieures. Une réduction est possible même au cas où $\|T\|<1$, la fonction caractéristique $\Theta_T(\lambda)$ étant alors unitaire sur la circonférence unité et analytique même sur cette circonférence (*cf.* [VIII], n° 5): le problème des sous-espaces invariants est donc équivalent au problème des factorisations de telles fonctions en facteurs contractifs analytiques dans le cercle unité et unitaires sur la circonférence. Malheureusement, le problème de telles factorisations est ouvert, du moins dans le cas général où la dimension de l'espace en question est infinie.

Par contre, dans certains cas où la fonction caractéristique de T *n'est pas intérieure*, nous pouvons dès maintenant faire usage de notre théorème 1 pour construire des sous-espaces invariants; les cas considérés diffèrent des exemples connus jusqu'à présent d'opérateurs possédant des sous-espaces invariants.

5. Quelques théorèmes généraux sur les fonctions analytiques à valeurs opérateurs

1. Soit $N(t)$ $(0\leqq t\leqq 2\pi)$ une fonction à valeurs opérateurs autoadjoints dans l'espace de Hilbert (séparable) $\mathfrak{E}$, fortement mesurable, et telle que $O\leqq N(t)\leqq I$. Elle engendre par $(Nv)(t)=N(t)v(t)$ un opérateur N dans l'espace $L^2(\mathfrak{E})$, qui est aussi autoadjoint et tel que $O \leqq N \leqq I$. Désignons par $U^\times$ l'opérateur de la multiplication par la fonction scalaire e^{it} dans $L^2(\mathfrak{E})$; $U^\times$ est unitaire et permute évidemment à N.

La proposition suivante est connue; *cf.* LOWDENSLAGER [7].

Proposition 5. 1. a) *Lorsque la condition*

$$\bigcap_{n \geqq 0} U^{\times n}\overline{NH^2(\mathfrak{E})} = \{0\} \tag{5. 1}$$

est vérifiée, il existe une fonction analytique contractive extérieure $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{F}, \Theta(\lambda)\}$ *telle que*

$$N(t)^2 = \Theta(e^{it})^* \Theta(e^{it}) \qquad \text{p. p.} \tag{5. 2}$$

b) *Inversement, la condition* (5. 1) *est toujours vérifiée lorsque* $N(t)$ *est de la forme* (5. 2) *où* $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{F}, \Theta(\lambda)\}$ *est une fonction analytique contractive quelconque.*

Démonstration. *Ad* a). Puisque N permute à $U^\times$, le sous-espace $\mathfrak{N} = \overline{NH^2(\mathfrak{E})}$ est invariant pour $U^\times$. La condition (5. 1) veut dire que la restriction de $U^\times$ à $\mathfrak{N}$ n'a pas de partie unitaire. Donc $\mathfrak{N}$ a la décomposition de Wold de la forme suivante:

$$\mathfrak{N} = \bigoplus_0^\infty U^{\times n}\mathfrak{F} = M_+(\mathfrak{F}) \quad \text{où} \quad \mathfrak{F} = \mathfrak{N} \ominus U^\times \mathfrak{N}.$$

Il est évidemment possible d'identifier les fonctions constantes dans $L^2(\mathfrak{E})$ à leurs valeurs dans $\mathfrak{E}$ et de plonger de cette façon l'espace $\mathfrak{E}$ dans l'espace $L^2(\mathfrak{E})$ comme un sous-espace de celui-ci. Ce sous-espace $\mathfrak{E}$ est évidemment ambulant pour $U^\times$; on a

$$L^2(\mathfrak{E}) = \bigoplus_{-\infty}^\infty U^{\times n}\mathfrak{E} = M(\mathfrak{E}), \quad H^2(\mathfrak{E}) = \bigoplus_0^\infty U^{\times n}\mathfrak{E} = M_+(\mathfrak{E}).$$

On a donc

$$\overline{NM_+(\mathfrak{E})} = \overline{NH^2(\mathfrak{E})} = \mathfrak{N} = M_+(\mathfrak{F}).$$

Ainsi, nous pouvons appliquer le lemme du n° 2 au cas $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}' = L^2(\mathfrak{E})$, $U = U' = U^\times$, $\mathfrak{A} = \mathfrak{E}$, $\mathfrak{A}' = \mathfrak{F}$ et $Q = N$. Nous obtenons qu'il existe une fonction analytique contractive extérieure $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{F}, \Theta(\lambda)\}$ telle que

$$\Phi^{\mathfrak{F}} Nv = \Theta(e^{it})v(t) \quad \text{pour} \quad v \in L^2(\mathfrak{E}); \tag{5. 3}$$

ici on a fait usage du fait que $\Phi^{\mathfrak{E}}v = v$ parce que $\mathfrak{E}$ est le sous-espace de $L^2(\mathfrak{E})$ des fonctions contantes. [18])

Puisque $\Phi^{\mathfrak{F}}$ est unitaire, (5. 3) entraîne pour $v, v' \in L^2(\mathfrak{E})$ quelconques:

$$(Nv, Nv')_{L^2(\mathfrak{E})} = (\Phi^{\mathfrak{F}}Nv, \Phi^{\mathfrak{F}}Nv')_{L^2(\mathfrak{F})} = (\Theta v, \Theta v')_{L^2(\mathfrak{F})},$$

donc

$$\int_0^{2\pi} (N(t)^2 v(t), v'(t))_{\mathfrak{E}}\, dt = \int_0^{2\pi} (\Theta(e^{it})^* \Theta(e^{it}) v(t), v'(t))_{\mathfrak{E}}\, dt,$$

d'où il s'ensuit (grâce aussi à la séparabilité de $\mathfrak{E}$) l'assertion (5. 2).

[18]) En effet, $u = \Sigma U^{\times n} e_n$ ($e_n \in \mathfrak{E}$) veut dire que

$$(\Phi^{\mathfrak{E}} u)(t) = \sum e^{int} e_n \equiv u(t).$$

Ad b). Pour $v \in L^2(\mathfrak{E})$ définissons Y par

$$Y(Nv) = \Theta v.$$

En vertu de (5. 2), Y est une isométrie de $NL^2(\mathfrak{E})$ dans $L^2(\mathfrak{F})$, qui s'étend par continuité à une isométrique de $\overline{NL^2(\mathfrak{E})}$ dans $L^2(\mathfrak{F})$. En désignant par $U^\times$ et $V^\times$ l'opérateur de multiplication par la fonction e^{it} dans $L^2(\mathfrak{E})$ et $L^2(\mathfrak{F})$, selon les cas, il résulte que $YU^\times = V^\times Y$ dans $\overline{NL^2(\mathfrak{E})}$ et par suite

$$Y \bigcap_{n \geq 0} U^{\times n} \overline{NH^2(\mathfrak{E})} \subseteq \bigcap_{n \geq 0} V^{\times n} \overline{\Theta H^2(\mathfrak{E})} \subseteq \bigcap_{n \geq 0} V^{\times n} H^2(\mathfrak{F}) = \{0\};$$

la dernière égalité s'ensuit de ce que $V^{\times n} H^2(\mathfrak{F})$ est composé des fonctions analytiques dont les premiers n coefficients de Taylor s'annulent.

Y étant isométrique, les relations ci-dessus entraînent (5. 1).

Proposition 5. 2. a) *Soient* $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{E}_*, \Theta(\lambda)\}$ *et* $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{F}, \Theta_1(\lambda)\}$ *deux fonctions analytiques contractives, dont la seconde est extérieure, et supposons que*

$$\Theta_1(e^{it})^* \Theta_1(e^{it}) \geq \Theta(e^{it})^* \Theta(e^{it}) \quad \text{p. p.} \tag{5. 4}$$

Il existe alors une fonction analytique contractive $\{\mathfrak{F}, \mathfrak{E}_*, \Theta_2(\lambda)\}$ *telle que*

$$\Theta(\lambda) = \Theta_2(\lambda)\, \Theta_1(\lambda) \qquad (|\lambda| < 1). \tag{5. 5}$$

b) *Lorsque dans* (5. 4) *il y a égalité p. p., la fonction* $\Theta_2(\lambda)$ *est intérieure. Si, de plus,* $\Theta(\lambda)$ *est extérieure, alors* $\Theta_2(\lambda)$ *est une constante unitaire.*

Démonstration. *Ad* a). (5. 4) entraîne

$$\|\Theta_1 v\|_{L^2(\mathfrak{F})} \geq \|\Theta v\|_{L^2(\mathfrak{E})} \quad \text{pour tout} \quad v \in L^2(\mathfrak{E}).$$

Ainsi, on définit par la formule

$$X(\Theta_1 v) = \Theta v \qquad (v \in L^2(\mathfrak{E})) \tag{5. 6}$$

une contraction X de $\Theta_1 L^2(\mathfrak{E})$ dans $L^2(\mathfrak{E}_*)$, qui s'étend alors par continuité à une contraction X de $\overline{\Theta_1 L^2(\mathfrak{E})}$ dans $L^2(\mathfrak{E}_*)$. Puisque $\Theta_1(\lambda)$ est extérieure, on a $\overline{\Theta_1 H^2(\mathfrak{E})} = H^2(\mathfrak{F})$ et par conséquent $\overline{\Theta_1 L^2(\mathfrak{E})} = L^2(\mathfrak{F})$. Comme $\Theta v \in H^2(\mathfrak{E}_*)$ pour $v \in H^2(\mathfrak{E})$, parce que $\Theta(\lambda)$ est analytique, on a

$$XH^2(\mathfrak{F}) = X\overline{\Theta_1 H^2(\mathfrak{E})} \subseteq \overline{\Theta H^2(\mathfrak{E})} \subseteq H^2(\mathfrak{E}_*).$$

En désignant par $U_*^\times$ et $V^\times$ la multiplication par e^{it} dans l'espace $L^2(\mathfrak{E}_*)$ et dans l'espace $L^2(\mathfrak{F})$, il résulte de la définition (5. 6) de X qu'on a aussi $XV^\times = U_*^\times X$ dans $L^2(\mathfrak{F})$. Ainsi, on peut appliquer le lemme du n° 2 au cas $\mathfrak{R} = L^2(\mathfrak{F})$, $\mathfrak{R}' = L^2(\mathfrak{E}_*)$, $U = V^\times$, $U' = U_*^\times$, $\mathfrak{A} = \mathfrak{F}$, $\mathfrak{A}' = \mathfrak{E}_*$ (où $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{E}$ sont considérés comme sous-espaces des espaces correspondants L^2, constitués des fonctions constantes), et $Q = X$. Il résulte qu'il existe une fonction analytique contractive $\{\mathfrak{F}, \mathfrak{E}_*, \Theta_2(\lambda)\}$ telle que

$$Xw = \Theta_2(e^{it})\, w(t) \quad \text{pour tout} \quad w \in L^2(\mathfrak{F}); \tag{5. 7}$$

on a fait ici usage de ce que, grâce au choix particulier des sous-espaces ambulants

$\mathfrak{E}_*$ et $\mathfrak{F}$, on a $\Phi^{\mathfrak{E}_*}u=u$ pour $u\in L^2(\mathfrak{E}_*)$ et $\Phi^{\mathfrak{F}}v=v$ pour $v\in L^2(\mathfrak{F})$. En particulier, pour $w=\Theta_1 v$ $(v\in L^2(\mathfrak{E}))$, (5. 6) et (5. 7) entraînent

$$\Theta(e^{it})v(t)=\Theta_2(e^{it})\Theta_1(e^{it})v(t) \qquad \text{p. p.};$$

vu que v est arbitraire et que l'espace $\mathfrak{E}$ est séparable, cela donne

$$\Theta(e^{it})=\Theta_2(e^{it})\Theta_1(e^{it}) \qquad \text{p. p.},$$

d'où il résulte la relation (5. 5); *cf.* note [14]).

Ad b). Lorsque dans (5. 4) il y a égalité p. p., X est isométrique. Par conséquent, en vertu du point c) du lemme du n°2, la fonction $\Theta_2(\lambda)$ est intérieure. Si de plus la fonction $\Theta(\lambda)$ est extérieure, on a $XH^2(\mathfrak{F})=\overline{X\Theta_1 H^2(\mathfrak{E})}=\overline{\Theta H^2(\mathfrak{E})}=H^2(\mathfrak{E}_*)$, d'où

$$X\mathfrak{F} = X[H^2(\mathfrak{F})\ominus V^\times H^2(\mathfrak{F})] = H^2(\mathfrak{E}_*)\ominus U_*^\times H^2(\mathfrak{E}_*) = \mathfrak{E}_*$$

donc $X|\mathfrak{F}$ applique $\mathfrak{F}$ unitairement sur $\mathfrak{E}_*$. Par suite, en vertu du point b) du lemme, la fonction $\Theta_2(\lambda)$ est constante unitaire.

Remarque. Les propositions 5. 1 et 5. 2 nous permettent d'obtenir une factorisation en facteurs extérieur et intérieur de toute fonction analytique contractive $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{E}_*, \Theta(\lambda)\}$. En effet, il existe, en vertu de la proposition 5. 1, une fonction analytique contractive *extérieure* $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{F}, \Theta_e(\lambda)\}$ telle que

$$\Theta_e(e^{it})^*\,\Theta_e(e^{it}) = \Theta(e^{it})^*\,\Theta(e^{it}) \qquad \text{p. p.}$$

En appliquant ensuite la proposition 5. 2 on obtient qu'il existe une fonction analytique *intérieure* $\{\mathfrak{F}, \mathfrak{E}_*, \Theta_i(\lambda)\}$ telle que

$$\Theta(\lambda)=\Theta_i(\lambda)\Theta_e(\lambda) \quad (|\lambda|<1).$$

C'est ce qu'on appellera *la factorisation canonique* de $\Theta(\lambda)$ en facteurs extérieur $\Theta_e(\lambda)$ et intérieur $\Theta_i(\lambda)$. Elle est déterminée de manière univoque dans le sens que si $\Theta(\lambda)=\Theta_i'(\lambda)\Theta_e'(\lambda)$ est une factorisation de même type, avec un espace intermédiaire $\mathfrak{F}'$ peut-être différent, il existe une application unitaire Z de $\mathfrak{F}$ sur $\mathfrak{F}'$ telle que

$$\Theta_e'(\lambda)=Z\Theta_e(\lambda) \quad \text{et} \quad \Theta_i'(\lambda)=\Theta_i(\lambda)Z^{-1} \qquad (|\lambda|<1).$$

Cela s'ensuit aussitôt de la proposition 5. 2, b).

Proposition 5. 3. *Soit* $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{E}_*, \Theta(\lambda)\}$ *une fonction analytique contractive *-extérieure, c'est-à-dire telle que la fonction* $\{\mathfrak{E}_*, \mathfrak{E}, \Theta^\sim(\lambda)\}$, *où* $\Theta^\sim(\lambda)=\Theta(\bar{\lambda})^*$, *est extérieure, et posons* $N(t)=[\Theta(e^{it})^*\Theta(e^{it})]^{\frac{1}{2}}$. *Soit* α *un ensemble mesurable dans l'intervalle* $[0, 2\pi)$ *et définissons*

$$N_\alpha(t)=I_{\mathfrak{E}} \ \textit{dans}\ \alpha \quad \textit{et} \quad N_\alpha(t)=N(t) \ \textit{dans}\ \alpha'=[0,2\pi)-\alpha.$$

Il existe alors deux fonctions analytiques contractives, $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{F}, \Theta_1(\lambda)\}$ *et* $\{\mathfrak{F}, \mathfrak{E}_*, \Theta_2(\lambda)\}$, *dont la première est extérieure, telles qu'on ait*

$$N_\alpha(t)=[\Theta_1(e^{it})^*\,\Theta_1(e^{it})]^{1/2} \qquad \text{p. p.} \tag{5. 8}$$

et

$$\Theta(\lambda)=\Theta_2(\lambda)\Theta_1(\lambda); \tag{5. 9}$$

de plus cette factorisation de $\Theta(\lambda)$ *vérifie la condition* (ii) *du théorème* 1. *Dans le* *cas où la fonction $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{E}_*, \Theta(\lambda)\}$ n'est pas intérieure, l'ensemble α peut être choisi de façon que $\Theta(e^{it})$ ne soit pas isométrique aux points d'un ensemble de mesure positive dans α ainsi que d'un ensemble de mesure positive dans α'; la factorisation obtenue vérifie alors aussi la condition* (i).

Démonstration. Puisque $N_\alpha(t) \geqq N(t)$ partout, on a $\|N_\alpha v\|_{L^2(\mathfrak{E})} \geqq \|Nv\|_{L^2(\mathfrak{E})} = \|\Theta v\|_{L^2(\mathfrak{E}_*)}$ pour $v \in L^2(\mathfrak{E})$, donc on définit par

$$Y(N_\alpha v) = \Theta v \qquad (v \in L^2(\mathfrak{E})) \tag{5.10}$$

une contraction Y de $N_\alpha L^2(\mathfrak{E})$ dans $L^2(\mathfrak{E}_*)$, qui s'étend par continuité à une contraction de $\overline{N_\alpha L^2(\mathfrak{E})}$ dans $L^2(\mathfrak{E}_*)$. En désignant par $U^\times$ et $U_*^\times$ l'opérateur de la multiplication par e^{it} dans $L^2(\mathfrak{E})$ et $L^2(\mathfrak{E}_*)$, suivant les cas, il résulte de (5. 10) que $YU^\times = U_*^\times Y$ dans $\overline{N_\alpha L^2(\mathfrak{E})}$. On en déduit la relation

$$Y \bigcap_{n \geqq 0} U^{\times n} \overline{N_\alpha H^2(\mathfrak{E})} \subseteqq \bigcap_{n \geqq 0} U_*^{\times n} \overline{\Theta H^2(\mathfrak{E})} \subseteqq \bigcap_{n \geqq 0} U_*^{\times n} H^2(\mathfrak{E}_*) = \{0\}.$$

Afin d'établir la condition (5. 1) pour $N_\alpha(t)$, il ne reste donc qu'à démontrer que le seul élément $w \in \overline{N_\alpha L^2(\mathfrak{E})}$ pour lequel $Yw = 0$, est $w = 0$. Cela revient à démontrer que si $\{v_n\}$ est une suite d'éléments de $L^2(\mathfrak{E})$ telle que

$$N_\alpha v_n \to w \quad \text{et} \quad \Theta v_n \to 0 \quad (\text{convergences } L^2),$$

alors $w = 0$. En remplaçant la suite au besoin par une suite partielle [19]) on aura même

$$N_\alpha(t) v_n(t) \to w(t) \quad \text{et} \quad \Theta(e^{it}) v_n(t) \to 0 \qquad \text{p. p.}$$

Ainsi, on a p. p. dans α

$$\Theta(e^{it}) w(t) = \Theta(e^{it}) \lim_n N_\alpha(t) v_n(t) = \Theta(e^{it}) \lim_n v_n(t) = \lim_n \Theta(e^{it}) v_n(t) = 0$$

et p. p. dans α'

$$\|\Theta(e^{it}) w(t)\| \leqq \|w(t)\| = \lim_n \|N_\alpha(t) v_n(t)\| = \lim_n \|\Theta(e^{it}) v_n(t)\| = 0,$$

donc

$$\Theta(e^{it}) w(t) = 0 \qquad \text{p. p.}$$

et par conséquent

$$\int_0^{2\pi} (w(2\pi - t), \Theta^\sim(e^{it}) v(t))_{\mathfrak{E}}\, dt = \int_0^{2\pi} (\Theta(e^{-it}) w(2\pi - t), v(t))_{\mathfrak{E}_*}\, dt = 0 \tag{5.11}$$

pour toute fonction $v \in L^2(\mathfrak{E}_*)$. Comme $\Theta^\sim$ est extérieure, $\Theta^\sim H^2(\mathfrak{E}_*)$ est dense dans $H^2(\mathfrak{E})$ et par conséquent $\Theta^\sim L^2(\mathfrak{E}_*)$ est dense dans $L^2(\mathfrak{E})$, donc (5. 11) entraîne $w(2\pi - t) = 0$ p. p., donc $w = 0$.

En vertu de la proposition 5. 1 il existe donc une fonction analytique contractive extérieure $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{F}, \Theta_1(\lambda)\}$ telle que $N_\alpha(t) = [\Theta_1(e^{it})^* \Theta_1(e^{it})]^{\frac{1}{2}}$ p. p., et puisque $N_\alpha(t) \geqq N(t)$ il existe en vertu de la proposition 5. 2 une fonction analytique contractive $\{\mathfrak{F}, \mathfrak{E}_*, \Theta_2(\lambda)\}$ telle que $\Theta = \Theta_2 \Theta_1$.

---

[19]) Notamment telle que $\sum_n \|N_\alpha v_n - w\| < \infty$ et $\sum_n \|\Theta v_n\| < \infty$.

Cette factorisation de $\Theta(\lambda)$ vérifie (ii). En effet, on a

$$\Theta_1(e^{it})^*\Delta_2(t)^2\Theta_1(e^{it}) = \Theta_1(e^{it})^*[I-\Theta_2(e^{it})^*\Theta_2(e^{it})]\Theta_1(e^{it}) = \\ = N_\alpha(t)^2-N(t)^2 = O \quad \text{p. p. dans } \alpha'$$

et

$$\Delta_1(t)^2 = I_{\mathfrak{E}}-\Theta_1(e^{it})^*\Theta_1(e^{it}) = I_{\mathfrak{E}}-N_\alpha(t)^2 = O \quad \text{p. p. dans } \alpha,$$

donc

(5. 12) $\Delta_2(t)\Theta_1(e^{it})=O$ p. p. dans α' et $\Delta_1(t)=O$ p. p. dans α.

Soient v_1, v_2 deux fonctions quelconques dans $L^2(\mathfrak{E})$ et posons

(5. 13) $v(t)=v_1(t)$ dans α' et $v(t)=v_2(t)$ dans α;

on aura alors $v\in L^2(\mathfrak{E})$ et, en vertu de (5. 12) et (5. 13),

$$\Delta_2(t)\Theta_1(e^{it})v(t)\oplus\Delta_1(t)v(t) = \Delta_2(t)\Theta_1(e^{it})v_2(t)\oplus\Delta_1(t)v_1(t) \quad \text{p. p.}$$

ou en bref

(5. 14) $$\Delta_2\Theta_1 v\oplus\Delta_1 v = \Delta_2\Theta_1 v_2\oplus\Delta_1 v_1.$$

Comme Θ_1 est extérieure, $\Theta_1 H^2(\mathfrak{E})$ est dense dans $H^2(\mathfrak{F})$ et par conséquent $\Theta_1 L^2(\mathfrak{E})$ est dense dans $L^2(\mathfrak{F})$. Lorsque v_1 et v_2 varient dans $L^2(\mathfrak{E})$, le second membre de (5. 14) parcourt donc un ensemble dense dans $\overline{\Delta_2 L^2(\mathfrak{F})}\oplus\overline{\Delta_1 L^2(\mathfrak{E})}$, ce qui achève la démonstration de ce que la condition (ii) est vérifiée.

En cas où la fonction $\Theta(\lambda)$ n'est pas intérieure, il existe par définition un ensemble ϱ de mesure positive dans $[0, 2\pi)$, aux points duquel $N(t)\neq I_{\mathfrak{E}}$; on peut donc choisir α de sorte que $\alpha\cap\varrho$ et $\alpha'\cap\varrho$ soient de mesure positive. Montrons qu'aucune des fonctions $\Theta_1(\lambda)$, $\Theta_2(\lambda)$ n'est alors une constante unitaire. En effet, si $\Theta_2(\lambda)$ était une constante unitaire, on aurait

$$\|N(t)e\| = \|\Theta(e^{it})e\| = \|\Theta_1(e^{it})e\| = \|N_\alpha(t)e\| \quad \text{pour tout } e\in\mathfrak{E}, \text{ p. p.},$$

et par conséquent $N(t)=N_\alpha(t)$ p. p., ce qui n'est certainement pas le cas pour $t\in\alpha\cap\varrho$. De même, si $\Theta_1(\lambda)$ était une constante unitaire, (5. 8) entraînerait $N_\alpha(t)=I_{\mathfrak{E}}$ p. p., ce qui n'est pas le cas pour $t\in\alpha'\cap\varrho$.

Cela achève la démonstration de la proposition.

2. Pour les fonctions numériques $\Theta(\lambda)$, analytiques et bornées dans le disque unité et telles que $\Theta(\lambda)\not\equiv 0$, $\log|\Theta(e^{it})|$ est intégrable (théorème de SZEGŐ), de plus on a l'inégalité[20])

$$\log|\Theta(0)| \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|\Theta(e^{it})|\,dt$$

où l'égalité a lieu si la fonction $\Theta(\lambda)$ est extérieure et dans ce cas seulement[21]). Ces faits s'étendent aux fonctions à valeurs opérateurs de la façon suivante:

[20]) Admettant la valeur $-\infty$ pour le premier membre.

[21]) *Cf.* [6], p. 52 et p. 62.

Proposition 5.4. a) *Pour toute fonction analytique contractive* $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{E}_*, \Theta(\lambda)\}$ *et pour tout* $f \in \mathfrak{E}$ *tel que* $\Theta(\lambda)f \not\equiv 0$, *la fonction* $\log\|\Theta(e^{it})f\|$ *est intégrable et on a l'inégalité*[20])

$$\log\|\Theta(0)f\| \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\|\Theta(e^{it})f\|\,dt. \tag{5.15}$$

b) *Pour que dans* (5.15) *on ait égalité pour tout* f *tel que* $\Theta(\lambda)f \not\equiv 0$, *il faut et il suffit que dans la factorisation canonique de* $\Theta(\lambda)$ *le facteur intérieur soit constant. Dans ce cas on a même*

$$-\infty < \log\|\Theta(\lambda)f\| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r, \tau - t)\log\|\Theta(e^{it})f\|\,dt \qquad (\lambda = re^{i\tau}, 0 \leqq r < 1) \tag{5.16}$$

pour tout f *tel que* $\Theta(\lambda)f \not\equiv 0$; $P(r, t)$ *est le noyau de Poisson.*

Démonstration. Envisageons une fonction analytique contractive extérieure $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{E}_*, \Theta(\lambda)\}$ et posons

$$N(t) = [\Theta(e^{it})^* \,\Theta(e^{it})]^{1/2}.$$

Soit Z l'application isométrique de $\Theta H^2(\mathfrak{E})$ dans $NH^2(\mathfrak{E})$ définie par

$$Z\Theta u = Nu \quad (u \in H^2(\mathfrak{E})).$$

Puisque Θ est extérieure, Z se prolonge par continuité en une application unitaire de $H^2(\mathfrak{E}_*)$ sur $\mathfrak{N} = \overline{NH^2(\mathfrak{E})}$. En désignant par $U^\times$ et $U^\times_*$ l'opérateur de multiplication par e^{it} dans $\mathfrak{N}$ et $H^2(\mathfrak{E}_*)$, selon les cas, on a évidemment $ZU^\times_* = U^\times Z$ et par suite (grâce à ce que Z est unitaire)

$$Z(I - U^\times_* U^{\times *}_*) = (I - U^\times U^{\times *})Z.$$

Mais comme pour tout $u(\lambda) \in H^2(\mathfrak{E}_*)$ on a évidemment

$$(I - U^\times_* U^{\times *}_*)u = u(0),$$

on obtient en particulier

$$Z[\Theta(0)f] = (I - U^\times U^{\times *})Z\Theta f = (I - U^\times U^{\times *})Nf \qquad (f \in \mathfrak{E}). \tag{5.17}$$

Ici, le dernier membre est la projection orthogonale de Nf sur $\mathfrak{N} \ominus U^\times \mathfrak{N}$, projection que nous désignerons par P_f. Puisque Z est unitaire, il résulte de (5.17):

$$\|\Theta(0)f\| = \|P_f\|. \tag{5.18}$$

Désignons par $\mathfrak{N}_f$ le sous-espace de $\mathfrak{N}$ sous-tendu par les éléments

$$U^{\times n}Nf \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots);$$

on a en particulier $Nf \in \mathfrak{N}_f$. Soit p_f la projection orthogonale de Nf sur $\mathfrak{N}_f \ominus U^\times \mathfrak{N}_f$. Nous allons montrer que

$$P_f = p_f. \tag{5.19}$$

Comme on a

$$Nf - p_f \in U^\times \mathfrak{N}_f \subseteq U^\times \mathfrak{N},$$

il n'y a qu'à prouver, à cet effet, que $p_f \perp U^\times \mathfrak{N}$. Dans ce but observons d'abord que $U^{\times n} Nf \in U^\times \mathfrak{N}_f$ $(n=1, 2, \ldots)$ et par suite

$$(5.20) \qquad (p_f, U^{\times n} Nf) = 0 \qquad (n=1, 2, \ldots).$$

Introduisons pour tout $n=1, 2, \ldots$ la forme sesquilinéaire

$$[f_1, f_2]_n = (p_{f_1}, U^{\times n} Nf_2) \qquad (f_1, f_2 \in \mathfrak{E}).$$

En vertu de (5. 20) on a $[f,f]_n = 0$ pour tout $f \in \mathfrak{E}$, d'où

$$4[f_1, f_2]_n = [f_1+f_2, f_1+f_2]_n - [f_1-f_2, f_1-f_2]_n + \\ + i[f_1+if_2, f_1+if_2]_n - i[f_1-if_2, f_1-if_2]_n = 0 \qquad (f_1, f_2 \in \mathfrak{E}),$$

donc

$$(p_f, U^{\times n} Ng) = 0 \qquad (f, g \in \mathfrak{E}; n=1, 2, \ldots).$$

Or, les éléments $U^{\times n} Ng$ $(g \in \mathfrak{E}; n=1, 2, \ldots)$ sous-tendent $U^\times \mathfrak{N}$, donc p_f est orthogonal à $U^\times \mathfrak{N}$ pour tout $f \in \mathfrak{E}$, ce qui achève la démonstration de (5. 19).

Soit maintenant $f \in \mathfrak{E}$ tel que $\Theta(0)f \neq 0$. En vertu de (5. 18) et (5. 19) on a alors $p_f \neq 0$. D'autre part, en désignant par A_0 l'ensemble des polynômes numériques s'annulant à l'origine on a

$$0 \neq \|p_f\|^2 = \inf\{\|Nf - g\|^2 : g \in U^\times \mathfrak{N}_f\} = \inf\{\|Nf - \varphi(U^\times)Nf\|^2 : \varphi \in A_0\} = \\ = \inf_{\varphi \in A_0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |1 - \varphi(e^{it})|^2 \, \|N(t)f\|^2 \, dt.$$

Or, en vertu d'un théorème de SZEGŐ[22]), ce dernier infimum est égal à

$$\exp\left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \|N(t)f\|^2 \, dt\right].$$

Par conséquent, en vertu de (5. 18) et (5. 19) on a

$$\log \|\Theta(0)f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \|N(t)f\|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \|\Theta(e^{it})f\|^2 \, dt,$$

ce qui montre en particulier que $\log\|\Theta(e^{it})f\|$ est intégrable et que (5. 15) subsiste avec le signe d'égalité. Cela, repétons-le, pour toute fonction extérieure $\Theta(\lambda)$ et tout vecteur $f \in \mathfrak{E}$ tel que $\Theta(0)f \neq 0$.

Remplaçons la dernière condition par celle moins exigente $\Theta(\lambda)f \not\equiv 0$; il ne restreindra pas la généralité de supposer aussi que $\|f\|=1$. Désignons par Λ_f l'ensemble des points λ $\big(|\lambda|<1\big)$ où $\Theta(\lambda)f \neq 0$; puisque la fonction $\Theta(\lambda)f$ est analytique, l'ensemble Λ_f épuise le disque unité ouvert sauf peut-être un ensemble dénom-

[22]) *Cf.* [6], p. 49.

brable de points, ne s'accumulant pas dans l'intérieur du disque. Pour $|\lambda_1|<1$ envisageons la fonction

$$\Theta_1(\lambda)=\Theta((\lambda+\lambda_1)(1+\bar{\lambda}_1\lambda)^{-1})$$

qui est aussi analytique contractive et même extérieure, conséquence du fait, facile à démontrer, que les homographies de type envisagé engendrent des transformations linéaires bicontinues des espaces H^2 en question sur eux-mêmes. Lorsque $\lambda_1\in\Lambda_f$ on a $\Theta_1(0)f=\Theta(\lambda_1)f\neq 0$ et par conséquent

$$-\infty<\log\|\Theta_1(0)f\|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\|\Theta_1(e^{i\tau})f\|\,d\tau,$$

d'où par la substitution

$$(e^{i\tau}+\lambda_1)(1+\bar{\lambda}_1e^{i\tau})^{-1}=e^{it}$$

il résulte

$$-\infty<\log\|\Theta(\lambda_1)f\|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P(r_1,\tau_1-t)\log\|\Theta(e^{it})f\|\,dt, \tag{5.21}$$

$P(r,t)$ étant le noyau de Poisson et $\lambda_1=r_1e^{i\tau_1}$. Puisque $\|f\|=1$ entraîne $\log\|\Theta(e^{it})f\|\leqq\leqq 0$, et comme, d'autre part,

$$\frac{1-r}{1+r}\leqq P(r,t)\leqq\frac{1+r}{1-r}\qquad(0\leqq r<1), \tag{5.22}$$

de (5.21) on déduit que

$$-\infty<\frac{1}{2\pi}\frac{1-r_1}{1+r_1}\int_0^{2\pi}\log\|\Theta(e^{it})f\|\,dt,$$

donc $\log\|\Theta(e^{it})f\|$ est intégrable. Cela entraîne, à son tour, que le troisième membre de (5.21) est une fonction finie et continue de $\lambda_1=r_1e^{i\tau_1}$ dans tout l'intérieur du cercle unité. Comme $\|\Theta(\lambda_1)f\|$ aussi est fonction continue de λ_1, la relation (5.21), démontrée pour $\lambda_1\in\Lambda_f$, s'étend par continuité à tout λ_1, $|\lambda_1|<1$. Cela prouve (5.16) pour toute fonction $\Theta(\lambda)$ extérieure et tout f tel que $\Theta(\lambda)f\not\equiv 0$ et $\|f\|=1$; la dernière condition peut être omise en envisageant $f/\|f\|$ au lieu de f.

Passons au cas d'une fonction analytique contractive quelconque $\{\mathfrak{E},\mathfrak{E}_*,\Theta(\lambda)\}$. Soit $\Theta(\lambda)=\Theta_i(\lambda)\Theta_e(\lambda)$ sa factorisation canonique en facteurs extérieur $\{\mathfrak{E},\mathfrak{F},\Theta_e(\lambda)\}$ et intérieur $\{\mathfrak{F},\mathfrak{E}_*,\Theta_i(\lambda)\}$. Pour $f\in\mathfrak{E}$ tel que $\Theta(\lambda)f\not\equiv 0$ on a aussi $\Theta_e(\lambda)f\not\equiv 0$ et par suite la fonction $\log\|\Theta(e^{it})f\|$, étant égale p. p. à la fonction $\log\|\Theta_e(e^{it})f\|$, est intégrable et de plus

$$\|\Theta(0)f\|=\|\Theta_i(0)\Theta_e(0)f\|\leqq\|\Theta_e(0)f\|=\exp\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\|\Theta(e^{it})f\|\,dt\right]. \tag{5.23}$$

La condition $\Theta(\lambda)f\not\equiv 0$ étant équivalente à la condition $\Theta_e(\lambda)f\not\equiv 0$, et celle-ci, en vertu de ce qui précède, équivalente à la condition $\Theta_e(0)f\neq 0$, on aura égalité dans (5. 23) pour tout f tel que $\Theta(\lambda)f \not\equiv 0$ si, et seulement si l'on a l'égalité

(5. 24) $$\|\Theta_i(0)\Theta_e(0)f\| = \|\Theta_e(0)f\|$$

pour tout f tel que $\Theta_e(0)f \neq 0$. Comme l'égalité (5. 24) est évidemment vérifiée si $\Theta_e(0)f = 0$, elle doit être valable pour tout $f \in \mathfrak{E}$. Or, $\Theta_e(\lambda)$ étant extérieure, on a

(5.25) $$\overline{\Theta_e(0)\mathfrak{E}} = \mathfrak{F}.$$ [23])

Par conséquent, pour que (5. 24) subsiste pour tout $f \in \mathfrak{E}$, il faut et il suffit que $\|\Theta_i(0)g\| = \|g\|$ subsiste pour tout $g \in \mathfrak{F}$. Or, cette condition est évidemment vérifiée si $\Theta_i(\lambda)$ est une constante isométrique et il résulte de la proposition 4. 1 qu'elle est vérifiée dans ce cas seulement. Cela achève la démonstration de la proposition 5. 4.

Proposition 5. 5. *Soit $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{E}_*, \Theta(\lambda)\}$ extérieure.* a) *Pour un $f \in \mathfrak{E}$, la fonction $\Theta(\lambda)f$ s'annule ou bien en chaque point λ $(|\lambda| < 1)$ ou bien en aucun.* b) *$\Theta(\lambda)$ admet une inverse au sens strict*[24]) *ou bien en chaque point λ $(|\lambda| < 1)$ ou bien en aucun.*

Démonstration. a) est évident de ce qui précède. Quant à b), observons d'abord que (5. 16) et (5. 22) entraînent

$$-\infty < \frac{1+r}{1-r}\log\|\Theta(0)f\| \leqq \log\|\Theta(\lambda)f\| \leqq \frac{1-r}{1+r}\log\|\Theta(0)f\| \qquad (|\lambda| = r < 1)$$

pour tout $f \in \mathfrak{E}$ tel que $\|f\| = 1$ et $\Theta(\lambda)f \not\equiv 0$, d'où il résulte que, dans les mêmes conditions,

$$\log\|\Theta(\lambda_1)f\| \leqq \frac{1-r_1}{1+r_1}\,\frac{1-r_2}{1+r_2}\log\|\Theta(\lambda_2)f\| \quad \text{pour} \quad |\lambda_i| = r_i < 1 \qquad (i = 1, 2).$$

Supposons que $\Theta(\lambda_1)^{-1}$ existe au sens strict. On a alors pour tout $f \in \mathfrak{E}$ tel que $\|f\| = 1$ et pour tout λ_2

(5.26) $$\|\Theta(\lambda_1)^{-1}\|^{-1} = \inf_{\|g\|=1}\|\Theta(\lambda_1)g\| \leqq \|\Theta(\lambda_1)f\| \leqq \|\Theta(\lambda_2)f\|^{\varrho_{12}}$$

où

$$\varrho_{12} = \frac{1-r_1}{1+r_1}\,\frac{1-r_2}{1+r_2}.$$

D'autre part, *pour toute fonction extérieure $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{E}_*, \Theta(\lambda)\}$ on a*

(5. 27) $$\overline{\Theta(\lambda)\mathfrak{E}} = \mathfrak{E}_* \qquad (|\lambda| < 1).$$ [25])

Les relations (5. 26) et (5. 27) entraînent que $\Theta(\lambda_2)^{-1}$ existe aussi, au sens strict, et que

(5.28) $$\|\Theta(\lambda_2)^{-1}\| \leqq \|\Theta(\lambda_1)^{-1}\|^{1/\varrho_{12}}.$$

Ainsi, le point b) de la proposition 5. 5 est démontré.

[23]) En effet, $g \in \mathfrak{F}$ et $g \perp \Theta_e(0)\mathfrak{E}$ entraînent que la fonction constante $g(\lambda) \equiv g$ est orthogonale dans $H^2(\mathfrak{F})$ à $\Theta_e H^2(\mathfrak{E})$.

[24]) C'est-à-dire une inverse définie partout dans $\mathfrak{E}_*$ et bornée.

[25]) Cette proposition se réduit au cas $\lambda = 0$, envisagé plus haut (5. 25), par une homographie.

Proposition 5. 6. *Soit $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{E}_*, \Theta(\lambda)\}$ une fonction analytique extérieure telle que $\Theta(0)^{-1}$ existe au sens strict et que $\Theta(e^{it})$ soit isométrique pour presque tous les points e^{it} d'un arc ω de la circonférence unité. On peut alors prolonger $\Theta(\lambda)$ analytiquement au travers de ω à tout l'extérieur du cercle unité.*

Démonstration. Commençons par le suivant complément à la relation (5. 27): *Pour toute fonction extérieure $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{E}_*, \Theta(\lambda)\}$ on a*

$$\overline{\Theta(e^{it})\mathfrak{E}} = \mathfrak{E}_* \text{ p. p.} \tag{5.29}$$

En effet, de $\overline{\Theta H^2(\mathfrak{E})} = H^2(\mathfrak{E}_*)$ il s'ensuit en particulier que pour toute fonction constante $e_*(t) = e_* \in \mathfrak{E}_*$ il existe une suite d'éléments $u_n \in H^2(\mathfrak{E})$ telle que $\Theta u_n \to e_*$ dans $H^2(\mathfrak{E}_*)$; en passant au besoin à une suite partielle on aura même $\Theta(e^{it})u_n(e^{it}) \to$ $\to e_*$ p. p. Grâce à ce que $\mathfrak{E}_*$ est séparable il en résulte (5. 29).

De cette manière (5. 29) et notre hypothèse que $\Theta(e^{it})$ est isométrique p. p. sur ω entraînent que $\Theta(e^{it})$ y est même unitaire p. p.

Observons ensuite que si pour un $f \in \mathfrak{E}$ on a $\Theta(\lambda)f \equiv 0$, on a aussi $\Theta(e^{it})f = 0$ p. p. sur ω, donc $f = 0$. Ainsi, on peut appliquer (5. 16) pour tout $f \in \mathfrak{E}$, $f \neq 0$. En désignant

$$\varepsilon(\lambda) = \sup\{P(r, \tau - t)\colon e^{it} \notin \omega\} \qquad (\lambda = re^{i\tau}, 0 \leqq r < 1)$$

on aura donc pour tout $f \in \mathfrak{E}$, $\|f\| = 1$

$$\log\|\Theta(\lambda)f\| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r, \tau - t)\log\|\Theta(e^{it})f\|\,dt = {}^{26)}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int' P(r, \tau - t)\log\|\Theta(e^{it})f\|\,dt \geqq \varepsilon(\lambda)\frac{1}{2\pi}\int' \log\|\Theta(e^{it})f\|\,dt =$$

$$= \varepsilon(\lambda)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\|\Theta(e^{it})f\|\,dt = \varepsilon(\lambda)\log\|\Theta(0)f\|$$

d'où

$$\|\Theta(\lambda)f\| \geqq \|\Theta(0)f\|^{\varepsilon(\lambda)} \geqq \inf_{\|g\|=1}\|\Theta(0)g\|^{\varepsilon(\lambda)} = \|\Theta(0)^{-1}\|^{-\varepsilon(\lambda)}$$

et par conséquent

$$\|\Theta(\lambda)^{-1}\| \leqq \|\Theta(0)^{-1}\|^{\varepsilon(\lambda)} \qquad (|\lambda| < 1). \tag{5.30}$$

Envisageons la fonction $\Phi(\lambda) = [\Theta(\bar{\lambda})^{-1}]^*$ qui est, ainsi que $\Theta(\lambda)^{-1}$, analytique pour $|\lambda| < 1$. (5. 30) entraîne

$$\|\Phi(\lambda)\| \leqq \|\Theta(0)^{-1}\|^{\varepsilon(\bar{\lambda})}. \tag{5.31}$$

Soit ω^* l'image de l'arc ω par rapport à l'axe réel; soit ω_1^* un arc fermé dans l'intérieur de ω^* et soit G le domaine limité par ω_1^* et la corde correspondante. Comme $\varepsilon(\bar{\lambda})$ est une fonction bornée de λ dans G, (5. 31) entraîne que $\Phi(\lambda)$ est une fonction analytique bornée dans G. En se servant d'une représentation conforme de G sur

---

[26]) On désignera par $\int'$ l'intégrale prise sur l'ensemble des points $t \in (0, 2\pi)$ tels que $e^{it} \notin \omega$.

le disque unité et en appliquant le théorème de Fatou sous sa forme vectorielle[27]) à la fonction transformée, puis en revenant à la fonction initiale $\Phi(\lambda)$, on obtient que celle-ci admet une limite forte non-tangentielle p. p. sur ω_1^* et par conséquent p. p. sur ω^*.

Soit $\Omega(\lambda)=\Theta(\lambda)$ pour $|\lambda|<1$ et $\Omega(\lambda)=\Phi(1/\lambda)$ pour $|\lambda|>1$. D'après ce que nous venons de voir,

$$\Omega_+(e^{it})=\lim_{R\to 1+0}\Omega(Re^{it})=\lim_{R\to 1+0}\Phi\left(\frac{1}{R}e^{-it}\right)$$

existe au sens fort p. p. sur ω. D'autre part, pour $r\to 1-0$ on a

$$I=\Theta(re^{it})^*\,\Theta(re^{it})^{*-1}=\Theta(re^{it})^*\Phi(re^{-it})=\Theta(re^{it})^*\,\Omega\left(\frac{1}{r}e^{it}\right)\to\Theta(e^{it})^*\Omega_+(e^{it})$$

au sens faible, p. p. sur ω, donc $I=\Theta(e^{it})^*\Omega_+(e^{it})$ p. p. sur ω; comme $\Theta(e^{it})$ est unitaire p. p. sur ω, il résulte que

$$(5.32)\qquad \Omega_-(e^{it})=\lim_{r\to 1-0}\Omega(re^{it})=\Theta(e^{it})=\Omega_+(e^{it})\qquad \text{p. p. sur } \omega.$$

Puisque $\Omega(\lambda)$ est analytique dans l'intérieur du cercle unité ainsi que dans son extérieur, de (5. 32) on conclut de la manière familiaire (principe de réflexion de Schwarz) que les deux parties de $\Omega(\lambda)$ se rattachent analytiquement au travers de l'arc ω. Cela achève la démonstration de la proposition 5.6.

6. Existence et propriétés spectrales des sous-espaces invariants pour certaines classes de contractions

1. Rappelons que dans [VII] on a introduit les suivantes classes des contractions complètement non-unitaires:

$T\in C_{0\cdot}$ si $T^nf\to 0$ pour *tout* f; $T\in C_{1\cdot}$ si $T^nf\not\to 0$ pour *aucun* $f\neq 0$;

$T\in C_{\cdot 0}$ si $T^{*n}f\to 0$ pour *tout* f; $T\in C_{\cdot 1}$ si $T^{*n}f\not\to 0$ pour *aucun* $f\neq 0$;

et

$$C_{\alpha\beta}=C_{\alpha\cdot}\cap C_{\cdot\beta}\qquad(\alpha,\beta=0,1).$$

Toute contraction complètement non-unitaire admet des triangulations de types

$$(a)\quad\begin{pmatrix}C_{0\cdot} & *\\ O & C_{1\cdot}\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad(a')\quad\begin{pmatrix}C_{\cdot 1} & *\\ O & C_{\cdot 0}\end{pmatrix}$$

où dans la diagonale on a indiqué seulement la classe de l'opérateur et on a admis l'opérateur O de l'espace $\{0\}$ comme appartenant à toutes ces classes.

Ainsi, de nombreux problèmes pour les contractions, y compris celui sur les sous-espaces invariants, se réduisent aux cas particuliers des contractions appartenant à une de nos classes. Nous allons montrer comment les résultats des n^os^ pré-

[27]) *Cf.* [VIII], § 1, pour l'existence des limites radiales, d'où l'on passe aux limites non-tangentielles de la façon familiaire.

cédents permettent l'étude des classes $C_{\cdot 1}, C_{1\cdot}, C_{11}$. D'ailleurs chaque résultat pour l'une des classes $C_{\cdot 1}$ et $C_{1\cdot}$ porte aussi pour l'autre: il n'y a qu'à considérer T^* au lieu de T.

Théorème 2. *Soit $T \in C_{\cdot 1}$.* a) *Le spectre $\sigma(T)$ ou bien ne contient aucun point à l'intérieur du cercle unité, ou bien coïncide avec le disque unité fermé. De plus, dans le deuxième cas, ou bien chaque point à l'intérieur du cercle unité est une valeur propre de T, ou bien aucun. Toutes les situations mentionnées se présentent actuellement.* b) *Dans le cas où du moins un des indices de défaut $\mathfrak{d}_T = \dim \overline{(I-T^*T)^{\frac{1}{2}}\mathfrak{H}}$, $\mathfrak{d}_{T^*} = \dim \overline{(I-TT^*)^{\frac{1}{2}}\mathfrak{H}}$ est fini, ou bien chaque point à l'intérieur du cercle unité est une valeur propre de T, ou bien aucun tel point n'appartient à $\sigma(T)$.*

Démonstration. En vertu de [VIII], Corollaire à p. 58, $T \in C_{\cdot 1}$ veut dire que la fonction caractéristique de T est extérieure. Les premières deux assertions du théorème sont alors des conséquences immédiates de la proposition 5. 5 du n° précédent et du théorème 4 de [VIII]. Quant à la dernière assertion de a), remarquons d'abord que la fonction numérique $\frac{1}{2}(\lambda-1)$ est analytique contractive pure *extérieure* (cf. [VI], p. 146). La contraction dont la fonction caractéristique coïncide avec celle-ci, aura comme spectre la circonférence unité (*cf.* th. 4 de [VIII]). D'autre part, dans [VIII], p. 63, on a construit une contraction $T \in C_{11}$ dont le spectre coïncide avec le disque unité fermé et qui évidemment n'a pas de valeur propre (conséquence de ce que $T \in C_{1\cdot}$). Enfin, on construit une contraction $T \in C_{\cdot 1}$ telle que chaque point à l'intérieur du cercle unité soit une valeur propre de T, de la manière suivante. Soit $\{E^2, E^1, \Theta(\lambda)\}$ définie par

$$\Theta(\lambda)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}(\lambda-1),\ \frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Il est manifeste que c'est une fonction analytique contractive pure. De plus elle est extérieure. En effet, nous avons

$$\Theta(\lambda)\begin{pmatrix} -2\sqrt{2}\,u(\lambda) \\ \sqrt{2}\,u(\lambda) \end{pmatrix} = u(\lambda) \qquad (u \in H^2),$$

ce qui montre que $\Theta H^2(E^2) = H^2 = H^2(E^1)$. Comme, pour chaque λ, $\Theta(\lambda)$ applique E^2 dans E^1, $\Theta(\lambda)^{-1}$ ne peut exister, même pas au sens large. En vertu du th. 4 de [VIII], la contraction T correspondante, de classe $C_{\cdot 1}$, aura donc tout point λ $(|\lambda|<1)$ comme valeur propre.

Quant à b), il ne reste qu'à démontrer que tout point de $\sigma(T)$ à l'intérieur du cercle unité (s'il y en a) est une valeur propre de T. Dans ce but soit $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{E}_*, \Theta(\lambda)\}$ la fonction caractéristique de T où l'un des espaces $\mathfrak{E}$ et $\mathfrak{E}_*$ est de dimension finie. Grâce à la relation (5. 27) il résulte que $\mathfrak{E}_*$ est alors nécessairement de dimension finie. Mais alors si $\Theta(\lambda)^{-1}$ existe au sens large, elle existe aussi au sens strict ce qui en vertu du th. 4 de [VIII] achève la démonstration du théorème 2.

2. Nous allons maintenant établir l'existence d'une variété de sous-espaces invariants pour une contraction T de l'espace $\mathfrak{H} \neq \{0\}$, telle que $T \in C_{11}$, et cela en relation avec les sous-espaces spectraux de la dilatation unitaire minimum U de T. Dans ce but, reprenons les notations du n° 1. En vertu du th. 3 de [VII], T est quasi similaire[28]) à la restriction U^0 de U à $\mathfrak{K}_0$. Soit $\{E^0(\omega)\}$ la mesure spectrale de U^0, étalée sur la circonférence unité.

Théorème 3. *Soit $T \in C_{11}$. Pour chaque ensemble borélien β sur la circonférence unité, tel que $O \neq E^0(\beta) \neq I$, il existe un sous-espace non banal $\mathfrak{H}_\beta$ de $\mathfrak{H}$, invariant pour T et tel que $T_\beta = T|\mathfrak{H}_\beta$ est de classe C_{11} et quasi similaire à $U^0|E(\beta)\mathfrak{K}_0$. Lorsque $E(\beta_1) \neq E(\beta_2)$, on a $\mathfrak{H}_{\beta_1} \neq \mathfrak{H}_{\beta_2}$.*

Remarques. (i) D'après le th. 3 de [V], $\{E^0(\omega)\}$ est absolument continue. Ainsi, le théorème ci-dessus assure *l'existence d'une variété riche de sous-espaces invariants pour $T \in C_{11}$.*

(ii) Grâce aux triangulations (a) et (a') et à la remarque précédente il résulte aussitôt que *pour toute contraction T d'un espace de Hilbert $\mathfrak{H}$ de dimension > 1, telle que ni T^n ni T^{*n} ne tendent pas vers O lorsque $n \to \infty$, il existe un sous-espace non banal invariant.*[29])

Démonstration. Envisageons le modèle fonctionnel de T, donné par (3. 16)—(3. 17).[30]) En vertu du n° 4 de [VIII] on aura alors

$$\mathfrak{K} = L^2(\mathfrak{E}_*) \oplus \overline{\Delta L^2(\mathfrak{E})}, \qquad \mathfrak{K}_0 = \overline{\Delta L^2(\mathfrak{E})}$$

et U sera la multiplication par la fonction e^{it}. L'opérateur $\{E^0(\omega)\}$ sera, dans ce modèle, la multiplication par la fonction χ_ω où $\chi_\omega(t) = 1$ si $e^{it} \in \omega$ et $\chi_\omega(t) = 0$ ailleurs. Remarquons que ces faits subsistent pour toute contraction complètement non-unitaire, l'espace $\mathfrak{K}_0$ étant $\neq \{0\}$ si $T \notin C_{\cdot 0}$ et dans ce cas seulement (donc en particulier dans le cas qui nous occupe).

La condition $O \neq E^0(\beta) \neq I$ veut dire que l'ensemble des points t où $\Delta(t) \neq O$, c'est-à-dire où $\Theta(e^{it})$ n'est pas isométrique, a des parties de mesure positive dans $i_\beta = \{t: e^{it} \notin \beta\}$ ainsi que dans $i'_\beta = [0,2\pi) - i_\beta$. Ainsi, les conditions de la proposition 5. 3 sont vérifiées pour $\alpha = i_\beta$ (Θ est $*$-extérieure parce que $T \in C_{11} \subseteq C_{1\cdot}$). Soit $\Theta = \Theta_2\Theta_1$ la factorisation correspondante (5. 9). En vertu du théorème 1, cette factorisation donne naissance à un sous-espace non banal $\mathfrak{H}_\beta$ de $\mathfrak{H}$, invariant pour T. Soit $T_\beta = T|\mathfrak{H}_\beta$. Puisque $T \in C_{1\cdot}$, on a aussi $T_\beta \in C_{1\cdot}$; et puisque la fonction caractéristique de T_β coïncide avec la partie pure de Θ_1 (proposition 4. 2) qui est évidemment extérieure ainsi que Θ_1, on a $T_\beta \in C_{\cdot 1}$ (*cf.* [VIII], p. 58). Ainsi $T_\beta \in C_{11}$. En vertu du n° 4, § 2, et de ce que nous venons de remarquer, l'opérateur U^0_β attaché à T_β (dans le même sens que U^0 était attaché à T) s'identifie à la multiplication par e^{it} dans $\overline{\Delta_1 L^2(\mathfrak{E})}$. Comme

$$\Delta_1(t) = O \quad \text{pour} \quad t \in i_\beta \quad \text{et} \quad \Delta_1(t) = \Delta(t) \quad \text{ailleurs,}$$

on aura

$$\overline{\Delta_1 L^2(\mathfrak{E})} = \chi_\beta \overline{\Delta L^2(\mathfrak{E})},$$

donc U^0_β s'identifie à $U^0|E^0(\beta)\mathfrak{K}_0$. Ainsi, comme $T_\beta \in C_{11}$, T_β est quasi similaire à $U^0|E^0(\beta)\mathfrak{K}_0$. Cela achève la démonstration de la première assertion du théorème.

[28]) Deux transformations linéaires bornées, A et B, sont *quasi similaires* lorsqu'il existe des transformations linéaires bornées X et Y, admettant des inverses à domaines denses (mais non nécessairement bornées) telles que

$$AX = XB \quad \text{et} \quad BY = YB.$$

[29]) La condition $\dim \mathfrak{H} > 1$ assure que cette proposition soit valable même dans le cas où T est unitaire.

[30]) Nous maintenons les notations $T, \mathfrak{K}, U$ etc. aussi dans le modèle envisagé.

Envisageons deux ensembles de type β, soit β_1 et β_2, tels que $\mathfrak{H}_{\beta_1} = \mathfrak{H}_{\beta_2}$. Alors $T_{\beta_1} = T_{\beta_2}$ et par suite les opérateurs

$$U_1 = U^0 | E^0(\beta_1)\mathfrak{K}_0 \quad \text{et} \quad U_2 = U^0 | E^0(\beta_2)\mathfrak{K}_0$$

sont quasi similaires: $U_1 X = X U_2$, $Y U_1 = U_2 Y$. U_1 est un opérateur unitaire dans l'espace $\mathfrak{K}_1 = E^0(\beta_1)\mathfrak{K}_0$ et U_2 est un opérateur unitaire dans l'espace $\mathfrak{K}_2 = E^0(\beta_2)\mathfrak{K}_0$. Les mesures spectrales correspondantes sont

$$E_1(\omega) = E^0(\omega \cap \beta_1) | \mathfrak{K}_1 \quad \text{et} \quad E_2(\omega) = E^0(\omega \cap \beta_2) | \mathfrak{K}_2 .$$

En appliquant le théorème de FUGLEDE—PUTNAM [8] on obtient que $E_1(\omega) X = X E_2(\omega)$, $Y E_1(\omega) = E_2(\omega) Y$. Puisque $E_2(\beta_2) = I_{\mathfrak{K}_2}$, on aura donc $Y E_1(\beta_2) = Y$, d'où $E_1(\beta_2) = I_{\mathfrak{K}_1}$ et par conséquent $E^0(\beta_2 \cap \beta_1) = E^0(\beta_1)$. De manière analogue, $E^0(\beta_1 \cap \beta_2) = E^0(\beta_2)$. Ainsi, $E^0(\beta_1) = E^0(\beta_2)$. Cela achève la démonstration du théorème.

3. Les sous-espaces invariants $\mathfrak{H}_\beta$ que nous venons de construire jouissent des propriétés spectrales additionnelles du moins dans le cas où le spectre de T ne recouvre pas la circonférence unité. A cet effet, démontrons d'abord le suivant

Théorème 4. *Soit $T \in C_{\cdot 1}$ telle que $\sigma(T)$ ne recouvre pas la circonférence unité. On a alors $\sigma(T) = \sigma(U^0)$.*

Démonstration. Puisque $T \in C_{\cdot 1}$, la fonction caractéristique $\Theta_T(\lambda)$ est extérieure. De plus, comme $\sigma(T)$ ne recouvre pas la circonférence unité, on déduit du théorème 2 que $\sigma(T)$ ne contient aucun point à l'intérieur de ce cercle, donc $\Theta_T(\lambda)^{-1}$ existe au sens strict pour tout λ $(|\lambda| < 1)$. En vertu du th. 4 de [V] on a $\sigma(U^0) \subseteq \sigma(T)$; il ne reste donc qu'à montrer que si un arc ω de la circonférence unité est disjoint à $\sigma(U^0)$, il est disjoint aussi à $\sigma(T)$. Or, faisant usage du modèle fonctionnel de T et U^0 on voit que $\Delta_T(t) = O$, et par conséquent $\Theta_T(e^{it})$ est isométrique, en presque tous les points t tels que $e^{it} \in \omega$. En vertu de la proposition 5. 6, $\Theta_T(\lambda)$ peut alors être prolongée analytiquement au travers de l'arc ω, ce qui entraîne, d'après le th. 4 de [VIII], que ω appartient à l'ensemble résolvant de T. Cela achève la démonstration.

Des théorèmes 3 et 4 nous déduisons le suivant

Corollaire. *Soit $T \in C_{11}$ telle que $\sigma(T)$ ne recouvre pas la circonférence unité. Dans les conditions du théorème 3 on a alors $\sigma(T_\beta) \subseteq \bar{\beta}$.*

Démonstration. Pour $|\lambda| > 1$ on a

$$(\lambda I_{\mathfrak{H}_\beta} - T_\beta)^{-1} = (\lambda I_{\mathfrak{H}} - T)^{-1} | \mathfrak{H}_\beta, \tag{6.1}$$

ce qu'on voit en envisageant les développements de Taylor autour du point à l'infini. Or, comme $\sigma(T)$ est un sous-ensemble propre de la circonférence unité, la fonction $(\lambda I_{\mathfrak{H}} - T)^{-1}$ se prolonge analytiquement au travers de certains arcs et il en sera de même pour la fonction (6. 1). Ainsi, $\sigma(T_\beta)$ ne recouvre pas la circonférence unité (on a même $\sigma(T_\beta) \subseteq \sigma(T)$). Comme de plus $T_\beta \in C_{11}$, on déduit du théorème 4 que $\sigma(T_\beta) = \sigma(U_\beta^0) = \sigma(U^0 | E^0(\beta)\mathfrak{K}_0)$; or le spectre de $U^0 | E^0(\beta)\mathfrak{K}_0$ est évidemment inclus dans $\bar{\beta}$, ce qui achève la démonstration du corollaire.

Ouvrages cités

[V] B. Sz.-Nagy et C. Foiaş, Sur les contractions de l'espace de Hilbert. V. Translations bilatérales, *Acta Sci. Math.*, **23** (1962), 106—129.

[VI] B. Sz.-Nagy et C. Foiaş, Sur les contractions de l'espace de Hilbert. VI. Calcul fonctionnel, *Acta Sci. Math.*, **23** (1962), 130—167.

[VII] B. Sz.-Nagy et C. Foiaş, Sur les contractions de l'espace de Hilbert. VII. Triangulations. Fonction minimum, *Acta Sci. Math.*, **25** (1964), 12—37.

[VIII] B. Sz.-Nagy et C. Foiaş, Sur les contractions de l'espace de Hilbert. VIII. Fonctions caractéristiques. Modèles fonctionnels, *Acta Sci. Math.*, **25** (1964). 38—71.

[1] B. Sz.-Nagy et C. Foiaş, Propriétés des fonctions caractéristiques, modèles triangulaires et une classification des contractions de l'espace de Hilbert, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **256** (1963), 3413—3415.

[2] B. Sz.-Nagy et C. Foiaş, Une caractérisation des sous-espaces invariants pour une contraction de l'espace de Hilbert, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **258** (1964), 3426—3429.

[3] М. С. Бродский—М. С. Лившиц, Спектральный анализ несамосопряженных операторов и промежуточные системы, *Успехи Матем. Наук*, **13:1 (79)** (1958), 3—58.

[4] Ю. Л. Шмульян, Некоторые вопросы теории операторов с конечным рангом неермитовости, *Матем. Сборник*, **57** (1962), 105—136.

[5] Ю. Л. Шмульян, Операторы с вырожденной характеристической функции, *Доклады АН СССР*, **93** (1953), 985—988.

[6] K. Hoffman, *Banach spaces of analytic functions* (Englewood Cliffs, N. J., 1962).

[7] D. B. Lowdenslager, On factoring matrix valued functions, *Annals of Math.*, **78** (1963), 450—454.

[8] C. R. Putnam, On normal operators in Hilbert space, *Amer. J. Math.*, **73** (1951), 357—362.

(Reçu le 1 mai 1964)

Bibliographie

M. Hervé, Several complex variables. Local theory, VI+134 pages, London, Oxford University Press, 1963.

Ce livre, qui repose sur un cours tenu par l'auteur en 1961 au "Tata Institute of Fundamental Research" à Bombay, est une introduction à la théorie locale des fonctions de plusieurs variables complexes.

Le mode d'exposition, caractérisé par l'utilisation systématique de la formule intégrale de Cauchy, est spécifique au corps des nombres complexes (par exemple, la formule intégrale de Cauchy est utilisée même pour démontrer les théorèmes de préparation de Weierstrass et Späth—Cartan, qui cependant expriment essentiellement des propiétés de l'anneau des séries entières convergentes à coefficients appartenant à un corps valué (complet, commutatif, nondiscret) quelconque). Le livre comprend les chapitres:

I. Basic properties of holomorphic functions of several complex variables.
II. The ring of holomorphic functions at a point.
III. Analytic sets.
IV. Local properties of analytic sets.

Au premier chapitre on introduit les notions de fonction holomorphe et de germe de fonction holomorphe, on démontre la formule intégrale de Cauchy et on en déduit des conséquences immédiates.

Au second chapitre on commence par démontrer les théorèmes de préparation de Weierstrass et de Späth—Cartan. Ces théorèmes permettent ensuite d'obtenir les propiétés fondamentales de l'anneau $\mathcal{H}_m^a$ des germes de fonction holomorphe en un point $a \in C^m$ ($\mathcal{H}_a^m$ est un anneau factoriel et noetherien). Ces propiétés sont utilisées ensuite à l'étude des germes d'ensembles analytiques en a.

Le but essentiel du chapitre III est de formuler et démontrer un théroème fondamental de description locale d'un ensemble analytique.

A l'aide de ce théorème fondamental on aborde au quatrième chapitre certains faits essentiels de la théorie locale des ensembles analytiques: théorème de Cartan concernant la cohérence du faisceau d'un ensemble analytique, théorème des zéros de Hilbert dans le cas analytique, résultats concernant la dimension des ensembles analytiques, etc.

On donne aussi la définition de fonction holomorphe sur un ensemble analytique et on démontre certaines propriétés sans donner le théorème de normalisation de Cartan—Oka.

Ce livre de M. Hervé réussit donc d'introduire le lecteur dans la théorie moderne des fonctions à plusieurs variables complexes. Beaucoup des résultats abordés n'étaient pas exposés, jusqu'à présent, de façon cohérente dans un livre. En s'appuyant sur cette introduction, le lecteur intéressé continuera plus facilement l'étude des mémoires originaux sur le sujet traité.

M. Jurchescu (Bucarest)

Mahlon M. Day, Normed linear spaces, Second printing corrected (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Neue Folge, Heft 21), 140 pages, Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer-Verlag, 1962.

The great interest arosen by the first edition has necessitated very soon a second edition. Some minor errors contained in the first edition were corrected. A review of the first edition appeared in these *Acta*, **21** (1960).

L. Gehér (Szeged)

Alfred Rényi, Wahrscheinlichkeitsrechnung mit einem Anhang über Informationstheorie, XII+547 Seiten, Berlin, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1962.

Dieses Buch ist eine Umarbeitung des im Jahre 1954 in ungarischer Sprache erschienenen Lehrbuches vom Verf. Es hat einen einführenden Charakter, aber enthält einen großen Stoff, und setzt gewisse Vorkentnisse über die Theorie der reellen Funktionen und über die komplexe Funktionentheorie voraus. Die Auswahl des Stoffes ist etwas subjektiv; neben der sorgfältigen Darstellung der grundlegenden Theorie werden auch einige speziellere Problemkreise behandelt.

Im ersten Kapitel wird die Algebra der Ereignisse betrachtet. Im endlichen Fall mit elementaren Methoden und im allgemeinen Fall durch Anwendung des Satzes von M. H. Stone wird es bewiesen, daß eine Ereignisalgebra isomorph zu einer Mengenalgebra ist. Im zweiten Kapitel wird der Begriff der Wahrscheinlichkeit eingeführt. Nach entsprechenden Vorbereitungen erreicht Verf. zum Begriff der Kolmogoroffschen Wahrscheinlichkeitsalgebra. In diesem Kapitel werden der Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit und der Begriff der Unabhängigkeit von Ereignissen erörtert, die klassischen kombinatorischen und geometrischen Berechnungsmethoden von Wahrscheinlichkeiten diskutiert, endlich eine neue, vom Verfasser stammende axiomatische Theorie der bedingten Wahrscheinlichkeiten betrachtet. Das dritte Kapitel beschäftigt sich mit diskreten Zufallsveränderlichen. Nach dem Satz über die vollständige Wahrscheinlichkeit und dem Satz von Bayes werden die klassischen Wahrscheinlichkeitsverteilungen (z. B. Binomial-, Polynomial-, hypergeometrische und negative Binomialverteilungen) eingeführt und mit Beispielen illustriert. Dann werden der Begriff der Zufallsveränderlichen, die Unabhängigkeit von Zufallsveränderlichen, der Erwartungswert, die Streuung und der Korrelationskoeffizient betrachtet. Für die Poissonsche Verteilung werden mehrere Anwendungen angegeben. Es folgen die erzeugende Funktion und ihre Anwendungen, der Satz von Moivre—Laplace und das Bernoullische Gesetz der großen Zahlen. Das vierte Kapitel beschäftigt sich mit allgemeinen Zufallsveränderlichen und ihren Verteilungsfunktionen und Dichtefunktionen, mit dem allgemeinen Begriff des Erwartungswerts und der Streuung. Die Fragen der allgemeinen bedingten Wahrscheinlichkeiten, z. B. die Verallgemeinerung des Bayesschen Satzes, werden im fünften Kapitel behandelt. In den weiteren drei Kapiteln beschäftigt sich Verf. mit den charakteristischen Funktionen, mit den Gesetzen der großen Zahlen, bzw. mit den Grenzverteilungssätzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Diese Kapiteln enthalten ein sehr reiches Material. Der Satz von Paul Lévy über die Fourier—Stieltjes-Transformierten, weiterhin mehrere klassische und moderne Sätze über die charakteristischen Eigenschaften der Normalverteilung werden bewiesen, die unbeschränkt teilbare und stabile Verteilungen erwähnt, Fragen betreffs der charakteristischen Funktionen bedingter Wahrscheinlichkeitsverteilungen mit Benützung der Theorie der Distributionen behandelt. Die wichtigsten Gesetze der großen Zahlen, der Hauptsatz der matehmatischen Statistik von Gliwenko, der Satz vom iterierten Logarithmus, der Satz von Lindeberg, der Satz von Markoff über die Markoffschen Ketten und die Sätze von Smirnoff und Kolmogoroff über die geordneten Stichproben werden auch bewiesen. Der Anhang des Buches gibt eine Einleitung in die Informationstheorie; eigentlich nur der Begriff der Information wird eingehend diskutiert. Am Ende des Buches gibt es einige Tabellen und ein ausgedehntes Schriftenverzeichnis. Am Ende jedes Kapitels kann der Leser viele interessante Beispiele finden, die teils sehr verschiedene Anwendungen der Theorie vorzeigen, teils den Text ergänzen.

K. Tandori (Szeged)

G. Marinescu, Espaces vectoriels pseudotopologiques et théorie des distributions, 232 pages, Berlin, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1963.

Le but de ce livre est de donner un aperçu des divers problèmes d'analyse fonctionnelle se rattachant à la théorie des distributions pour laquelle il offre une excellente introduction. Bien qu'il fait usage des traités qui l'ont précédé (comme ceux de L. Schwartz et de Gelfand et Šilov sur la théorie des distributions et de Bourbaki sur les espaces vectoriels topologiques) ce livre en diffère par l'utilisation systématique des structures pseudotopologiques et polynormés, aussi bien que par la variété de son contenu dûe au fait que l'auteur s'était borné dans chaque problème seulement aux faits fondamentaux sans suivre leurs développements ultérieurs plus techniques. Cela d'ailleurs est dans l'esprit du livre qui, selon son auteur, s'adresse surtout aux débutants et practiciens. Le livre contient 5 chapitres: 1. Définitions et propriétés élémentaires de diverses catégories d'espaces vectoriels; 2. Espaces d'opérations linéaires. Distributions; 3. Produits tensoriels et opérations multilinéaires; 4. Fonctions et distributions à valeurs vectoriels; 5. Applications.

Remarquons que le chapitre 3 contient une présentation des éléments fondamentaux de la théorie des produits tensoriels (notamment les produits tensoriels projectifs et injectifs, les transformations intégrales et celles nucléaires, les espaces nucléaires, le théorème des noyaux, etc.) en prenant constamment comme point de départ le cas des espaces normés. Cela donne un caractère élémentaire à toute cette théorie, le caractère unitaire de la présentation étant assuré par l'utilisation de la structure polynormée des espaces des opérations linéaires continues (introduites par l'auteur). Ce chapitre permet donc de s'initier dans la théorie des produits tensoriels des espaces vectoriels topologiques dûe à A. GROTHENDIECK sans utiliser l'excellent mais difficile mémoire original de cet auteur.

Le livre est écrit dans un style fluide mais concis. Il sera certainement utile aux mathématiciens qui sans être des spécialistes dans la théorie des distributions ou les théories adjacentes d'analyse fonctionnelle, ont besoin de celles-ci dans leurs recherches ou dans leur formation scientifique générale.

C. Foiaş (Bucarest)

H. G. Garnir, Fonctions de variables réelles, tome I, X+518 pages, Louvain, Librairie Universitaire, Paris, Gauthier-Villars, 1963.

Ce livre contient le traité de la théorie des fonctions des variables réelles d'une manière complète, rigoureuse, logique et moderne. L'auteur cherche à donner à son exposé une généralité suffisante en développant systématiquement l'analyse dans l'espace euclidien à n dimensions et pour des fonctions complexes. Malgré cela, grâce au style claire et exact de l'auteur, aux bonnes figures, aux exemples et exercices nombreux, l'exposé gagne en simplicité, en élégance et en clarté.

Le présent tome I contient la matière suivante.

I. *Ensembles.* Relations entre les ensembles. Dénombrabilité. Ensembles non dénombrables.

II. *Espace euclidien à n dimensions.* Distance de points. Ensembles bornés. Existence des meilleures bornes supérieure et inférieure. Suite de points. Convergence. Le critère de convergence de Cauchy. Ensembles ouverts et fermés. Ensembles compacts. Théorèmes de Bolzano—Weierstrass, de Heine—Borel et de Cantor. Convergence des séries. Séries absolument convergentes.

Appendice. Nombres réels et complexes. Théorie exacte des nombres réels, fondée sur les développements décimaux et la théorie de Hamilton des nombres complexes.

III. *Fonctions.*

IV. *Limites des valeurs d'une fonction.*

V. *Continuité des fonctions.*

VI. *Dérivation des fonctions.* Dérivée partielle. Fonctions plusieurs fois continûment dérivables. Formule de Taylor. La règle de l'Hospital. Fonctions monotones. Conditions nécessaires et suffisantes d'extrema locaux. Changement des variables dans les opérateurs de dérivation.

VII. *Limites de fonctions.* Convergence des suites et des séries des fonctions. Convergence uniforme. Critère de Cauchy sur la convergence uniforme. Continuité de la limite. Critère de Dini. Approximations des fonctions continues par des polynômes. Dérivabilité terme à terme des suites et des séries.

VIII. *Fonctions élémentaires.*

IX. *Primitivation des fonctions.*

X. *Équations differentielles élémentaires.*

Le tome II, qui est en préparation, traitera entre autres de l'intégrale de Lebesgue, des intégrales de Fourier et de Laplace, des distributions, des fonctions analytiques réelles dans l'espace euclidien à n dimensions et des séries de puissances.

K. Tandori (Szeged)

E. Hewitt and K. A. Ross, Abstract Harmonic Analysis, vol. I (Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Bd. 115), VII+519 pages, Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer-Verlag, 1963.

Abstract harmonic analysis has developed over the past few decades. The decisive step in its foundation was the discovery, by A. HAAR in 1933, of the existence of invariant measures on separable locally compact groups. His construction was reformulated and extended to arbitrary locally compact groups by A. WEIL in 1936. This discovery had a tremendous effect on the development of the general theory of locally compact groups; among other things, it suggested an extension of classical Fourier analysis from some special locally compact abelian groups as the unit circle, the integers, and the real line, to any locally compact abelian groups. The realization of this idea was initiated by A. WEIL in 1940, who showed in his monograph *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications* (Paris, 1940) that several classical theorems about Fourier series and integrals (for instance PLANCHEREL'S theorem, the Herglotz—Bochner theorem) could be meaningfully stated and proved in this general situation, too.

In the subsequent development of abstract harmonic analysis, the elaboration of the theory of commutative Banach algebras was a step of considerable importance; this theory made possible to develop harmonic analysis on locally compact abelian groups without referring to the "fine structure" of these groups. (In this treatment of the subject, the Pontryagin—van Kampen duality theorem is produced via PLANCHEREL'S theorem in a purely analytical way and the subject culminates in it. The standard works on the subject, appeared since WEIL'S fundamental treatise, have usually pointed out this global aspect of the theory. The book under review reflects WEIL'S original point of view, making the reader feel that the group-theoretic considerations are inherent in abstract harmonic analysis. Indeed, in the presentation of the Pontryagin—van Kampen duality theorem, which seems to be the basic tool in the authors' setting up of the theory, the authors are strongly influenced by PONTRYAGIN'S treatment. Of course, they make use of Banach algebraic tools, too, but in such a measure which is consistent with the treatment they prefer.

The present book, the first volume of a work of two volumes, is devoted to a study of the foundations of abstract harmonic analysis. The second volume will deal with harmonic analysis on compact groups and locally compact abelian groups.

The book consists of six chapters. Chapter 1 introduces notations and terminology, and gives a brief review of the parts of the theory of groups and of the set-theoretical topology needed in the book. Chapter 2 is an introduction to the structure of topological groups. After basic definitions and facts, the notions of subgroup, quotient group, product group and projective limit are introduced, and the elementary properties of topological groups are discussed, that depend upon connectedness or disconnectedness of the group considered as a topological space. Then it is shown that the topology of a topological group can be completely described by means of a family of left invariant pseudo-metrics, and some separation properties for topological groups are presented. Further, it is shown that every locally compact compactly generated abelian group is topologically isomorphic with a product of a compact abelian group, a finite number of copies of the topological groups of the real numbers, and a finite number of copies of group of the integers (taken with its discrete topology). Chapter 2 ends with the study of some special locally compact abelian groups. Chapter 3 is devoted to integration theory on locally compact spaces. This chapter might be very useful to everyone wishing a rapid introduction to the integration theory at the level required by functional analysis. In chapter 4 first the existence and uniqueness of the left Haar integral are established for an arbitrary locally compact group. The proof presented here is CARTAN'S constructive one. Then there follow theorems of KAKUTANI and OXTOBY on extension of Haar measure and some facts about nonmeasurable sets. This chapter ends with a study of invariant means on almost periodic functions. Chapter 5 initiates the study of harmonic analysis proper. To begin with, the convolution is defined in a reasonable generality, and some fundamental properties of convolutions of measures are developed. Then explicit formulas for convolutions of measures and functions are examined. Further, an introduction to representation theory of groups and algebras is given. The investigations of this chapter culminate in the famous Gelfand—Raĭkov theorem which establishes the existence of sufficiently many continuous irreducible unitary representations of a locally compact group. Chapter 6 is intended to give detailed information about the structure of locally compact abelian groups. Here it is explained what might be called the "fine structure" of this group. The basic tool in the program of this chapter is the character group and the Pontryagin—van Kampen duality theorem, in the exposition of which the authors follow PONTRYAGIN.

The book ends with three appendices assembling certain material form the algebraic theory of abelian groups, the theory of linear topological spaces, and the theory of Banach algebras, which are essential for one or other part of the book.

Some sections of the book contain subsections entitled Miscellaneous Theorems and examples, which give interesting supplementary information on the subject. There are many interesting historical notes scattered through the whole book.

The exposition is highly elegant. The authors were very successful in making their book useful to beginners as well as to specialists, in teaching and in research work. We attend with much interest the forthcoming volume.

I. Kovács (Szeged)

LIVRES REÇUS PAR LA RÉDACTION

F. V. Atkinson, Discrete and continuous boundary problems (Mathematics in Science and Engineering, Vol. 8), XIV+570 pages, New York–London, Academic Press, 1964. — \$ 16,50.

A. I. Lurje, Räumliche Probleme der Elastizitätstheorie, XI+504 Seiten, Berlin, Akademie Verlag, 1963. — DM 65,—

Proceedings of the Colloquium on Abelian Groups, edited by L. Fuchs and E. T. Schmidt, 162 pages, Budapest, Akadémiai Kiadó, 1964.

G. A. Rogers, Packing and covering, VIII+111 pages, Cambridge, University Press, 1964. — 30 s.

M. Rosati, Le funzioni e le varietà quasi abeliane dalla teoria del Severi ad oggi (Pontificiae Academiae Scientiarum Scripta Varia, 23), 194 pages, Ex Aedibus Academicis in Civitate Vaticana, 1962.

F. Severi, Funzioni quasi abeliane (Pontificiae Academiae Scientiarum Scripta Varia, 20), 2. ed., 406 pages, Ex Aedibus Academicis in Civitate Vaticana, 1961.

G. Szász, Introduction to lattice theory, 229 pages, Budapest, Akadémiai Kiadó, 1963.

INDEX — TARTALOM

ACTA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

SZEGED (HUNGARIA), ARADI VÉRTANÚK TERE 1

Prix d'abonnement pour l'étranger \$ 8.50. On peut s'abonner à l'entreprise de commerce des livres et journaux „Kultúra" (Budapest, I. Fő utca 32).

INDEX: 26024

64-1185 Szegedi Nyomda Vállalat

Felelős szerkesztő és kiadó: Szőkefalvi-Nagy Béla
A kézirat nyomdába érkezett: 1964. július hó
Megjelenés: 1964. december hó

Példányszám: 800. Terjedelem: 12,6 (A/5) ív
Készült monószedéssel, íves magasnyomással az MSZ 5601-54 és az MSZ 5602-55 szabvány szerint